Transporttheoretische Beschreibung von relativistischen Schwerionenkollisionen bei SIS-Energien

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 13 – Physik

vorgelegt von
Stefan Teis
aus Nidda

Gießen, 1996

D 26
Dekan: Prof. Dr. Herbert Schramm
I. Berichterstatter: Prof. Dr. Ulrich Mosel
II. Berichterstatter: Prof. Dr. Volker Metag
Tag der mündlichen Prüfung: 10. 1. 1997

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die relativistische Schwerionenphysik bietet die einzigartige Möglichkeit, im Labor Kernmaterie bei hohen Dichten ($\rho \geq \rho_0$) und hohen Temperaturen zu untersuchen. Eines der Hauptziele dieses Forschungszweiges ist es, die Zustandsgleichung der Kernmaterie (EOS von engl. 'equation of state') zu bestimmen. Die ersten Experimente zu diesen Fragestellungen wurden Mitte der siebziger Jahre am BEVALAC in Berkeley, Californien durchgeführt. Die Resultate dieser ersten Messungen wurden durch Feuerball-Modelle [1, 2], hydrodynamische Rechnungen [3, 4] und Kaskaden-Modelle [5] qualitativ wiedergegeben.
In den Feuerball-Modellen geht man davon aus, daß in einer Schwerionenkollision im Überlappbereich beider Kerne ein expandierender thermalisierter Feuerball gebildet wird, der die Dynamik der Reaktion bestimmt, während die Kernmaterie außerhalb dieser geometrischen Überlappzone nicht an der Reaktion beteiligt ist ('spectator - participant'-Bild). In den hydrodynamischen Modellen wird die Schwerionenreaktion, basierend auf dem Tröpfchenmodell der Kernphysik, als die Kollision zweier Kernmaterietropfen beschrieben. Ein völlig anderer Zugang wird in Kaskadenrechnungen verwendet, wo die Kollision der Schwerionen als inkohärente Überlagerung individueller Nukleon-Nukleon-Stöße beschrieben wird.
Anfang der achtziger Jahre gelang es in komplizierteren Experimenten (streamer-chamber [6], plastic-ball [7]), durch inklusive Messungen z.B den kollektiven transversalen Fluß und den sog. 'squeeze out' genauer zu bestimmen. Versuche, diese experimentellen Resultate mit den Feuerball-Modellen oder den hydrodynamischen Rechnungen zu reproduzieren, schlugen fehl. Dies ist darauf zurückzuführen, daß es sich bei diesen Phänomenen um Nichtgleichgewichtseffekte handelt. Zur Beschreibung dieser Nichtgleichgewichtsphänomene wurden in der folgenden Zeit transporttheoretische Modelle herangezogen.
Es ist bis heute nicht gelungen, alleine aus den kollektiven Observablen wie kollektiver Fluß oder squeeze-out definitive Rückschlüsse auf die Kernmateriezustandsgleichung zu ziehen. Dies liegt mit darin begründet, daß die hier angesprochenen Observablen keine direkten Informationen über die verdichtete Kernmaterie, wie sie im Verlauf einer Schwerionenreaktion auftritt, enthalten, da diese innerhalb kürzester Zeit in Fragmente mit einfacher Kerndichte oder Nukleonen zerfällt. Nur diese Endprodukte der Reaktion lassen sich dann im Experiment beobachten.
Um weitere Erkenntnisse zu gewinnen, ist es notwendig, die gesamte Dynamik von

Schwerionenkollisionen zu verstehen. Dazu wird neben den schon erwähnten kollektiven Observablen die Untersuchung der im Verlauf einer Schwerionenkollision produzierten Teilchen herangezogen. der Teilchenproduktion (speziell Pionen, η-Mesonen und Dileptonen) Die experimentellen Untersuchungen konzentrieren sich hier hauptsächlich auf folgende Teilchenarten:

- Pionen (π^-, π^0, π^+)
- η-Mesonen
- Kaonen und Antikaonen
- Antiprotonen
- Dileptonen

In Schwerionenkollisionen im SIS-Energiebereich werden - im Vergleich zu den anderen genannten Teilchenarten - große Mengen π-Mesonen produziert. Die Pionenproduktion geschieht primär durch die Anregung baryonischer Resonanzen R - hauptsächlich der $\Delta(1232)$-Resonanz - in Nukleon-Nukleon-Kollisionen ($N \rightarrow NR$). Diese so gebildeten Resonanzen können an weiteren Baryon-Baryon-Kollisionen teilnehmen, z.B. elastische Nukleon-Resonanz-Streuung ($NR \rightarrow NR$) oder Absorption der Resonanz an einem Nukleon ($RN \rightarrow NN$). Die Pionen, die am Ende einer Schwerionenkollision als freie Teilchen vorliegen, stammen überwiegend aus dem Zerfall der baryonischen Resonanzen in ein Nukleon und Pionen ($\Delta(1232) \rightarrow N\pi$, $R \rightarrow N\pi\pi$ o.ä.).
Bei Schwerionenkollisionen mit Einschußenergien im Bereich von 1 bis 2 AGeV liegen im Zentrum des Reaktionsvolumens circa 30% der Baryonen in Form von Resonanzen vor und es werden Baryonendichten von bis zum Dreifachen der Grundzustandsdichte ρ_0 erreichet. Die Dichte der baryonischen Resonanzen entspricht in der Hochdichtephase somit etwa dem Wert ρ_0, weshalb man auch von *Resonanzmaterie* spricht [8].
Da die Pionen stark an die baryonischen Resonanzen koppeln, tragen die am Ende der Reaktion vorliegenden Pionen wichtige Informationen über die Resonanzdynamik. Somit ist es für transporttheoretische Beschreibungen von Schwerionenkollisionen unerläßlich, die experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitte für die Pionenproduktion hinreichend gut zu beschreiben, um anhand dieser Modelle verläßliche Rückschlüsse auf die REaktionsdynamik ziehen zu können.
Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von η-Mesonen in Schwerionenkollisionen ist um circa einen Faktor 1000 kleiner als der Wirkungsquerschnitt für Pionenproduktion [9]. Im Gegensatz zu den Pionen koppelt das η-Meson nur an eine baryonische Resonanz, nämlich die $N(1535)$- oder S_{11}^--Resonanz, welche etwa zu 50% in ein Nukleon und ein η zerfällt. Die experimentelle Beobachtung der η-Produktion erlaubt somit Rückschlüsse auf die Dynamik der $N(1535)$-Resonanz. Da die Masse der η-Mesonen größer als die der Pionen ist, ist anzunehmen, daß die η-Mesonen früher als die Pionen ausfrieren, d.h. die Reaktionszon ohne weitere Wechselwirkung verlassen.
Sowohl die Pionen als auch die η-mesonen, die am Ende einer Schwerionenreaktion beobachtet werden, geben nur indirekt Aufschluß über die Hochdichtephase der Reaktion, da beide Mesonenarten eine starke Endzustandswechselwirkung mit dem sie umgebenden nuklearen Medium erfahren. Ihre freie Weglänge in Medium beträgt nur etwa 1 fm.

Die Produktionsschwelle für K^+-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen ($NN \rightarrow NYK^+$, $Y = \Lambda, \Sigma$) ist vergleichbar mit der Schwelle für die η-Produktion. Die primäre Produktion beider Mesonenarten findet somit etwa bei gleichen Dichten statt. Da es sich bei der K^+-Produktion um assoziierte 'Strangeness'-Produktion handelt, erfahren die K^+-Mesonen auf ihrem Weg aus der Reaktionszone nur elastische Streuung und werden nicht absorbiert [10, 11]. Die K^+-Mesonen stellen also eine Observable dar, mit deren Hilfe die Hochdichtephase einer Schwerionenreaktion direkt untersucht werden kann. Alledings muß auch hier bedacht werden, daß die am Ende der Reaktion vorliegenden K^+-Mesonen nicht ausschließlich aus der Hochdichtephase stammen, sondern auch in der Expansionsphasen z.B. durch Reaktionen vom Typ $\pi N \rightarrow \Lambda K^+$ erzeugt werden können.
Neben der K^+-Produktion wird derzeit auch die K^--Produktion experimentell untersucht. Die K^--Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen erfolgt ebenfalls über assoziierte 'Strangeness'-Produktion, allerdings liegt die K^--Schwelle über der für K^+-Produktion, da zusätzlich zum K^--Meson noch ein K^+-oder K^0-Meson erzeugt wird: $NN \rightarrow NNK^+K^-$. In [12, 13] wurde gezeigt, daß in Schwerionenkollisionen im SIS-Energiebereich etwa genausoviele K^--Mesonen aus π-Baryon-Kollisionen stammen, wie aus Baryon-Baryon-Kollisionen. Aufgrund der hohen Pionendichte kommt es auch zur Produktion von K^- in πY-Kollisionen infolge von 'strangeness'-Austauschreaktionen. Die Hyperonen liegen etwa in gleicher Zahl vor wie die K^+-Mesonen. Im Rahmen einer transporttheoretischen Rechnung [12] wurde kürzlich gezeigt, daß der Beitrag dieser Reaktionen zur K^--Produktion sogar die Beiträge aus Baryon-Baryon- und π-Baryon-Kollisionen übersteigen kann.

Da energetische Teilchen hauptsächlich in der Hochdichtephase einer Schwerionenkollision produziert werden, eignet sich die Teilchenproduktion unterhalb der freien Nukleon-Nukleon-Energieschwelle ('subthreshold'-Teilchenproduktion) ebenfalls zur Untersuchung der Dynamik eine Schwerionenkollision. Unter 'subthreshold'-Teilchenproduktion versteht man Teilchenproduktionsprozesse, die in Schwerionenreaktionen oder Proton-Kern-Kollisionen bei Einschußenergien ablaufen, bei denen sie im freien Nukleon-Nukleon-Stoß energetisch verboten wären. In Schwerionen- oder Proton-Kern-Reaktionen sind diese Prozesse bedingt durch Mehrfachstöße der dort vorhandenen Baryonen unter Ausnutzung des Fermiimpulses möglich. Für Einschußenergien im Bereich von 1 bis 2 AGeV ist die Antiproton-Produktion eine extremste 'subthreshold'-Reaktion, da die Produktionsschwelle für Antiprotonen im freien Nukleon-Nukleon-Stoß ($NN \rightarrow NNp\bar{p}$) bei 5.63 GeV liegt. Die Interpretation der experimentellen Daten zur Antiproton-Produktion in Schwerionenkollisionen [14, 15, 16, 17] gestaltet sich allerdings schwierig, da 90 bis 98% der produzierten Antiprotonen durch Annihilation mit Nukleonen ($p\bar{p} \rightarrow X$) wieder absorbiert werden.

Neben diesen hadronischen Observablen stellen elektromagnetische Teilchen eine vielversprechende Sonde dar, um zusätzliche Informationen über die Hochdichtephase einer Schwerionenkollision zu erhalten. Hierzu zählen Photonen und Dileptonen. Da diese Teilchen nicht der starken Wechselwirkung unterliegen, können sie - einmal produziert - die Reaktionszone ohne nennenswerte Endzustandswechselwirkung verlassen. Die

wichtigsten Elementarreaktionen für die Produktion von Dileptonen in Schwerionenkollisionen sind: Proton-Neutron-Bremsstrahlung, Pion-Nukleon-Bremsstrahlung, Δ-, η- und π^0-Dalitz-Zerfall, sowie der Zerfall von Vektormesonen $\omega, \rho^0 \rightarrow e^+e^-$ und die π^+-π^--Annihilation.
Aufgrund der fehlenden Endzustandswechselwirkung bieten Dileptonen auch die Möglichkeit, Modifikationen von Hadronenmassen und -breiten innerhalb des nuklearen Mediums zu untersuchen: Derartige Modifikationen werden von QCD-Rechnungen [19, 18] vorhergesagt. Der Grund hierfür ist, daß der Erwarungswert des Quarkkondensats $< \bar{q}q >$, der im Vakuum etwa einem Wert von $-(230 \text{ MeV})^3$ entspricht, aufgrund der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie mit steigender Baryonendichte kleinere Werte annimmt und somit die Massen der Hadronen abnehmen. Zur experimentellen Überprüfung dieser Aussage eignet sich besonders die Untersuchung des ρ^0-Zerfalls in Dileptonen, da die Lebensdauer des ρ^0 sehr klein ist (≈ 1.3 fm/c), daß es innerhalb des dichten Mediums zerfällt.

1.1 Experimente zur π-, η- und e^+e^--Produktion

Zur Untersuchung der Pionenproduktion (meist π^-) in Schwerionenkollisionen wurden in den achtziger Jahren sowohl in Berkeley als auch in Dubna [20] zahlreiche Messungen durchgeführt. Bereits die ersten Messungen an leichten Systemen ergab, daß die Pionenmultiplizität linear mit der Zahl der an der Reaktion teilnehmenden Nukleonen und ebenso annähernd linear mit der Energie im Schwerpunktsystem der Reaktion ansteigt [2]. Während für Einschußenergien von 0.8 AMeV die Pionenspektren einen von der Systemgröße abhängigen exponentiellen Verlauf aufwiesen [21], wurde für das System $Ar + KCl$ bei einer Einschußenergie von 1.8 AGeV ein 'konkaves' Pionenspektrum gemessen, das durch die Superposition zweier Exponentialfunktionen mit unterschiedlicher Steigung beschrieben wurde [85]. Am BEVALAC wurde Ende der achtziger Jahre am DLS (Dilepton-Spektrometer) [22] zum erstenmal die Dilepton-Produktion in Schwerionenkollisionen untersucht. Aufgrund der kleinen e^+e^--Multiplizitäten konnten noch keine konklusiven Aussagen aus den erhaltenen Spektren gezogen werden.

Im Jahre 1990 wurde an der GSI in Darmstadt der Beschleuniger SIS[1] in Betrieb genommen. Mit Hilfe dieses Beschleunigers ist es möglich, selbst schwere Elemente wie Gold auf Energien bis zu 1.6 AGeV zu beschleunigen. Mit den an der GSI durchgeführten Experimenten soll die Dynamik von Schwerionenreaktionen möglichst vollständig erfaßt werden. Die Untersuchungen zur Teilchenproduktion in Schwerionenkollisionen findet mit Hilfe folgender Detektorsysteme statt: TAPS, KaoS, FOPI und FRS:
Mit Hilfe des Detektorsystems TAPS ('Two Arm Photon Spectrometer') [23, 24] werden Photonen nachgewiesen. Der Nachweis von π^0- und η-Mesonen erfolgt über die Messung der in deren Zerfall ($\pi^0, \eta \rightarrow \gamma\gamma$) entstehenden Photonen und anschließender Rekonstruktion der invarianten Massen der Mesonen. Beim Detektor KaoS ('Kaon Spectrometer') [25] handelt es sich um ein Magnetspektrometer zum Nachweis leichter geladener Teilchen ($p, \bar{p}, \pi^+, \pi^-, K^+, K^-$). FOPI [26] ist ein 4π-Detektorsystem, das ebenfalls zum Nachweis geladener Teilchen entwickelt wurde. Mit diesem Detek-

[1] Schwerionen-Synchrotron

torsystem können nicht nur Protonen, Antiprotonen, Pionen und Kaonen gemessen werden, auch die Untersuchung kollektiver Phänomene und der Nachweis vom Fragmenten ist mit FOPI möglich [27]. Kürzlich gelang sogar der Nachweis von ϕ-Mesonen durch Analyse der invarianten Massen detektierter K^+K^--Paare [28]. Mit Hilfe des FRS (FRagmentSeparator) konnten ebenfalls leichte geladene Teilchen ($\bar{p}, K^-, \pi^-$) mit sehr guter Statistik unter 0^o im Laborsystem nachgewiesen werden [14].
Derzeit wird das Detektorsystem HADES ('High Acceptance DilElekctron Spectrometer') [29] zum Nachweis von Dileptonen in Schwerionenkollisionen und π-Kern-Reaktionen entwickelt. Mit diesem Spektrometer eröffnet sich die Möglichkeit, die interessante Fragestellung der Modifikation von Hadronenmassen durch das nukleare Medium experimentell zu untersuchen und diesbezügliche theoretischen Vorhersagen zu überprüfen.

1.2 Mikroskopische Modelle zur Beschreibung von Schwerionenkollisionen

Zur theoretischen Beschreibung von Schwerionenkollisionen im SIS-Energiebereich werden gegenwärtig fast ausschließlich Transportmodelle herangezogen. Diese Modelle stellen Erweiterungen der sog. Kaskadenmodelle [5] dar, in denen eine Schwerionenkollision durch die zeitliche Abfolge von Baryon-Baryon- und Meson-Baryon-Kollisionen beschrieben wird. Die Produktion und Absorption von Mesonen erfolgt durch die Population und den anschließenden Zerfall von Nukleonenresonanzen.
In den Transportmodellen werden zusätzlich zu der erwähnten Nukleonen-Kaskade noch dichte- (und impulsabhängige) mittlere Felder bzw. Potentiale, die die Dynamik der Baryonen beeinflussen, aufgenommen. Diese Potentiale werden an die Saturationseigenschaften der Kernmaterie sowie die experimentellen Ergebnisse zur Nukleon-Kern-Streuung angepaßt.
Bei den Tranportmodellen werden zwei verschiedene numerische Ansätze verfolgt:

- Quanten-Molekulardynamik-Modelle (QMD)
- Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck-Modelle (BUU)

Beiden Ansätzen ist die Behandlung der elementaren Baryon-Baryon- und Meson-Baryon-Kollisionen gemein: Zur numerischen Realisierung der elementaren Kollisionen werden Parametrisierungen der freien Wirkungsquerschnitte verwendet. QMD und BUU unterscheiden sich in der Behandlung der Realteile der optischen Potentiale der Baryonen. Während diese in QMD-Modellen durch 2- und 3-Teilchen-Wechselwirkungen realisiert werden, werden in BUU-Modellen Mittlere-Feld-Potentiale verwendet.
Zur Beschreibung relativistischer Schwerionenkollisionen im SIS-Energiebereich haben sich das QMD-Modell [30] und das IQMD-Modell [31, 32] als erfolgreich erwiesen. Zur Beschreibung von Schwerionenreaktionen bei höheren Einschußenergien wurde das RQMD-Modell [33] entwickelt. Ausgehend von [37] wurden mehrere BUU-Modelle [41, 56, 34] entwickelt, mit deren Hilfe ebenfalls die experimentellen Daten sehr gut reproduziert werden können. Während sich die soeben genannten Modelle

nicht-relativistischer Parametrisierungen der Mittleren-Feld-Potentiale bedienen, werden im RBUU-Modell [99, 35, 11] die Einteilchen-Potentiale aus kovarianten effektiven Wechselwirkungen abgeleitet.

1.3 Intention dieser Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein BUU-Modell zur Beschreibung der gesamten Dynamik von Schwerionenkollisionen mit Einschußenergien bis zu einigen GeV/Nukleon zu entwickeln und numerisch zu implementieren.
Neben der Verwendung von Einteilchen-Potentialen, die die experimentell bestimmte Impulsabhängigkeit aufweisen und kovariant definiert werden müssen, muß in diesem Energiebereich auch der Einfluß der höheren baryonischen Resonanzen auf die Dynamik der Schwerionenreaktionen berücksichtigt werden.
Trotz dieser komplexen Anforderungen sollte das Modell so beschaffen sein, daß mit vertretbarem numerischen Aufwand Vergleiche mit experimentellen Daten möglich sind.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden die Grundzüge des ('coupled-channel') CBUU-Modells dargelegt. Dazu werden zuerst die CBUU-Gleichungen abgeleitet und anschließend wird ein Überblick über alle im CBUU-Modell realisierten elementaren Reaktionen gegeben. Danach wird im dritten Kapitel der Begriff des Mittleren-Feld-Potentials erläutert und verschiedene nicht-relativistische Parametrisierungen des Einteilchen-Potentials vorgestellt. Ausgehend von diesen Parametrisierungen werden die im Rahmen des CBUU-Modells verwendeten Einteilchen-Potentiale so definiert, daß sie erstens wohl definierte Eigenschaften unter Lorentz-Transformationen besitzen und, zweitens, die experimentell bestimmte Impulsabhängigkeit aufweisen.
Neben den Mittleren-Feld-Potentialen bilden die verwendeten Wirkungsquerschnitte für die elementaren Reaktionen das Herzstück eines Transportmodells. Im vierten Kapitel wird die konsistente Bestimmung dieser Wirkungsquerschnitte im Rahmen eines Resonanzmodells erläutert. Insbesondere werden dabei die Wirkungsquerschnitte zur Bevölkerung baryonischer Resonanzen mit Massen bis zu 1950 MeV/c^2 so bestimmt, daß gleichzeitig die 1π-, η-, ρ- und 2π-Produktion in freien Nukleon-Nukleon-Reaktionen reproduziert wird.
Im Anschluß daran wird im fünften Kapitel die numerische Realisierung des CBUU-Modells vorgestellt. Darauf aufbauend wird die Stabilität der initialisierten Kerne und die Güte der Energieerhaltung überprüft.
Im sechsten Kapitel werden erste Ergebnisse vorgestellt. Es wird untersucht, welche Rolle die baryonischen Resonanzen bei der Beschreibung der Dynamik von Schwerionenkollisionen spielen und inwieweit sie die Pionen-Produktion beeinflussen. Daran anschließend wird überprüft, ob die Pionenproduktion sensitiv auf die verwendete EOS ist. Zum Schluß dieses Kapitels wird näher auf die Stoßparameterabhängigkeit der π-Produktion eingegangen.
Die Coulomb-Effekte auf die Spektren geladener Pionen werden im siebten Kapitel eingehend untersucht. Im achten und neunten Kapitel werden die Ergebnisse der CBUU-Rechnungen zur π- und η-Produktion in Schwerionenkollisionen mit vorhandenen Daten verglichen. Daran anschließend werden im zehnten Kapitel Ergebnisse zur Dileptonen-Produktion vorgestellt.

Kapitel 2

Das CBUU-Modell

In der klassischen Physik verwendet man Transportgleichungen, um Nichtgleichgewichtsphänomene wie z.B. Strömungsprobleme in der Hydrodynamik, Diffusion oder elektrische Leitfähigkeit zu beschreiben. Da auch Schwerionenreaktionen in erster Linie zu den Nichtgleichgewichtsreaktionen zu zählen sind, werden auch diese transporttheoretisch behandelt. Zu diesem Zweck soll im folgenden die CBUU-Transportgleichung abgeleitet und deren numerische Implementierung vorgestellt werden.

2.1 Die Transportgleichung

Die CBUU-Transportgleichung besteht aus zwei Teilen [36, 37]:

- der **Vlasov-Gleichung**, die die Bewegung der Nukleonen im Mittleren-Feld beschreibt. Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine semiklassische Gleichung, die mit quantenmechanischen Mittleren-Feld-Methoden wie z.B. der zeitabhängigen Hartree-Fock Theorie [38] vergleichbar ist. Eine Beschreibung von Schwerionenreaktionen allein mit der Vlasov-Gleichung ist nur bei niedrigen Einschußenergien ($E/A \leq 10MeV$) möglich, denn hier wird die gesamte Bewegung der Nukleonen durch die Mittlere-Feld-Dynamik bestimmt.

- dem **Stoßintegral**. Bei höheren Einschußenergien gewinnen die Nukleon-Nukleon-Stöße an Bedeutung, da diese nicht mehr durch das Pauli-Blocking verboten sind. Diesen Stößen wird durch die Einführung des Boltzmannschen Stoßintegrals Rechnung getragen [39, 36], wobei zusätzlich Blocking-Faktoren für die Fermionenendzustände auftreten [40].

Eine allgemeine Herleitung der relativistischen Transportgleichung über die Reduktion der Hierarchie relativistischer Dichtematrizen wurde in [41, 42] gegeben. Hierbei erhält man sowohl die Bewegungsgleichungen der Nukleonen im Mittleren-Feld als auch die Beiträge von Nukleon-Nukleon-Stößen konsistent aus einer renormierten Wechselwirkung. Ein äquivalenter Zugang über zeitabhängige Greenfunktionen und der Schwinger-Hierarchie der Greenfunktionen ist in der Literatur [43, 44] diskutiert.

2.2 Die Vlasov-Gleichung

In dieser Arbeit wird auf eine formale Herleitung der Vlasov-Gleichung verzichtet. Statt dessen wird sie aus dem aus der klassischen Mechanik bekannten Liouvilleschen Satz begründet.
In der klassischen Mechanik wird ein System aus N Teilchen durch die N-Teilchen-Phasenraumdichte $f_N(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}, \cdots, \vec{r_N}, \vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \cdots, \vec{p_N}, t)$, die explizit von den Orten und Impulsen der N Teilchen und von der Zeit t abhängt, charakterisiert. Falls sich diese N Teilchen gemäß den Hamiltonschen Gleichungen [46] bewegen, so gilt der Liouvillesche Satz. Dieser Satz besagt, daß die Phasenraumdichte f_N in der Umgebung eines mitbewegten Punktes zeitlich konstant ist, d.h.

$$\frac{df_N}{dt} = \frac{\partial f_N}{\partial t} + [f_N, H] = 0. \tag{2.1}$$

Die Poisson-Klammer $[f_N, H]$ ist wie folgt definiert,

$$[f_N, H] = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_N}{\partial \vec{r_i}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p_i}} - \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p_i}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{r_i}} \right), \tag{2.2}$$

wobei H die Hamiltonfunktion des N-Teilchen-Systems bezeichnet,

$$H = \sum_{i=1}^{N} t_i + \sum_{i<j} V(i,j). \tag{2.3}$$

t_i gibt kinetische Energie des Teilchens i an und $V(i,j)$ dbezeichnet die 2-Teilchen-Wechselwirkung der Teilchen i und j.
Ausgehend von der N-Teilchen-Phasenraumdichte definiert man die reduzierten Phasenraumdichten [48]

$$\begin{aligned} & f_n(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_n}, \vec{p_1}, \vec{p_2}, \cdots, \vec{p_n}, t) = \\ & \qquad \frac{N!}{(N-n)!} \underset{(n+1,\cdots,N)}{Tr} [f_N(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}, \cdots, \vec{r_N}, \vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \cdots, \vec{p_N}, t]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die reduzierte Phasenraumdichte f_n erhält man aus der N-Teilchen-Phasenraumdichte, indem die Freiheitsgrade von $N-n$ Teilchen ausintegriert werden, was in Gleichung (2.4) durch die Spur über die Teilchen $n+1$ bis N angedeutet wird. Der Vorfaktor ergibt sich aus Symmetrieüberlegungen für Fermionen.
Gleichung (2.1) ist äquivalent zu einem System gekoppelter Gleichungen für die reduzierten Phasenraumverteilungen, der sog. BBGKY[1]-Hierarchie [47, 48],

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = [\sum_{i=1}^{n} t_i, f_n] + [\sum_{i<j}^{n} V(i,j), f_n] + \underset{(n+1)}{Tr} [\sum_{i=1}^{n} V(i, n+1), f_{n+1}], \tag{2.5}$$

mit $1 \leq n \leq N$ und $f_{N+1} = 0$. Die Vlasov-Gleichung ergibt sich aus der Gleichung für f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = [t_1, f_1] + \underset{(2)}{Tr} [v(1,2), f_2] \tag{2.6}$$

[1]Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon

unter der Annahme, daß sich die 2-Teilchen-Phasenraumdichte gleich dem Produkt zweier 1-Teilchen-Phasenraumdichten

$$f_2(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{p_1}, \vec{p_2}, t) = f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t) \times f_1(\vec{r_2}, \vec{p_2}, t) \tag{2.7}$$

ist. Eingesetzt in Gleichung (2.6) liefert dieser Ansatz

$$\frac{\partial f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)}{\partial t} = [t_1, f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)] + \underset{(2)}{Tr}\ [v(1,2), f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t) f_1(\vec{r_2}, \vec{p}, t)]. \tag{2.8}$$

Der zweite Term der läßt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \underset{(2)}{Tr}\ [v(1,2), f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t) f_1(\vec{r_2}, \vec{p}, t)] &= \underset{(2)}{Tr}\ [v(1,2), f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)] f_1(\vec{r_2}, \vec{p_2}, t) \\ &+ \underset{(2)}{Tr}\ [v(1,2), f_1(\vec{r_2}, \vec{p_2}, t)] f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aus der Definition für die Poisson-Klammer (2.2) und der Tatsache daß in der klassischen Mechanik die Spur über Teilchen 2 mit einer Integration über d^3r_2 und d^3p_2 gleichzusetzen ist, ergibt sich

$$\underset{(2)}{Tr}\ [v(1,2), f_1(\vec{r_2}, \vec{p_2}, t)] = 0.$$

Während der 2. Term in Gleichung (2.9) verschwindet, kann der 1. Term mit dem Mittleren-Feld-Potential identifiziert werden. In der klassischen Mechanik erhält man das Mittlere-Feld-Potential $U(\vec{r_1}, \vec{p_1})$ eines Teilchens aus der Faltung der 2-Teilchen-Wechselwirkung mit der 1-Teilchen-Phasenraumdichte und anschließender Integration über den gesamten Phasenraum,

$$U(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t) = \int d^3p_2 \int d^3x_2 v(1,2) f_1(\vec{r_2}, \vec{p_2}, t).$$

Mit dieser Definition des Mittleren-Feld-Potentials ergibt sich für den ersten Term von Gleichung (2.9),

$$\underset{(2)}{Tr}\ [v(1,2), f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)] f_1(\vec{r_2}, \vec{p_2}, t) = [U(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t), f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)].$$

Somit erhält man für Gleichung (2.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)}{\partial t} &= [t_1, f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)] + [U(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t), f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)] \\ &= [(t_1 + U(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t), f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)] \\ &= [H_1^{mf}, f_1(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)], \end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei H_1^{mf} die Hamiltonfunktion für die Bewegung eines Teilchens mit den Koordinaten $\vec{r_1}$, $\vec{p_1}$ im Mittleren-Feld-Potential $U(\vec{r_1}, \vec{p_1}, t)$ ist. Unter Ausnutzung der Definition der Poisson-Klammer erhält man aus Gleichung (2.10) die Vlasov-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H^{mf}}{\partial \vec{p}} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial H^{mf}}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0. \tag{2.11}$$

Hier wurden die Koordinaten $\vec{r_1}$ und $\vec{p_1}$ durch $\vec{r}$ und $\vec{p}$ ersetzt.
Im CBUU-Modell wird für Nukleonen ein skalares Mittleres-Feld-Potential $U(\vec{r}, \vec{p})$ (s. Kapitel 3.3) verwendet. Dies führt zusammen mit der Ruhemasse m_N der Nukleonen auf eine effektive Masse

$$m^*(\vec{r}, \vec{p}) = m_N + U(\vec{r}, \vec{p}). \tag{2.12}$$

Damit ergibt sich die folgende Quasiteilchenenergie für die Baryonen,

$$E = \sqrt{m^*(\vec{r}, \vec{p})^2 + \vec{p}^2}. \tag{2.13}$$

Setzt man diese Energie in die Vlasov-Gleichung (2.11) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} \quad &+ \quad \left\{\frac{\vec{p}}{E} + \frac{m^*(\vec{r}, \vec{p})}{E} \vec{\nabla}_p U(\vec{r}, \vec{p})\right\} \vec{\nabla}_r f(\vec{r}, \vec{p}, t) \\ &+ \left\{-\frac{m^*(\vec{r}, \vec{p})}{E} \vec{\nabla}_r U(\vec{r}, \vec{p})\right\} \vec{\nabla}_p f(\vec{r}, \vec{p}, t) \;=\; 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Physikalisch beschreibt die Vlasov-Gleichung ein System von nicht wechselwirkenden Nukleonen, die sich im Mittleren-Feld-Potential $U(\vec{r}, \vec{p})$ bewegen. Die 1-Teilchen-Phasenraumdichten aller anderen Teilchensorten genügen entsprechenden Vlasov-Gleichungen. Im CBUU-Modell wird für alle Baryonen dasselbe skalare Mittlere-Feld-Potential $U(\vec{r}, \vec{p})$ verwendet. Für die Mesonen hingegen enthält das Modell kein nukleares Mittleres-Feld-Potential.

2.3 Das Stoßintegral

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß die Phasenraumdichte, die der Vlasov-Gleichung genügt, an jedem Punkt des Phasenraums konstant bleibt. Dies hat nur Gültigkeit, falls Stöße der Teilchen untereinander vernachlässigt werden können (Gleichung (2.7)). Allerdings gewinnen die individuellen Nukleon-Nukleon-Kollisionen bei der Beschreibung von Schwerionenreaktionen immer mehr an Bedeutung, je größer die Laborenergie wird. Speziell für den in dieser Arbeit betrachteten Energiebereich (1 - 2 AGeV) müssen diese Kollisionen berücksichtigt werden, die im folgenden heuristisch eingeführt werden:
Betrachtet man eine Phasenraumzelle mit $\vec{r} \,\epsilon\, [\vec{r}, \vec{r} + \Delta\vec{r}]$ und $\vec{p} \,\epsilon\, [\vec{p}, \vec{p} + \Delta\vec{p}]$, so ist es möglich, daß die Phasenraumdichte in dieser Zelle aufgrund von Stößen abnimmt (Verlust-Term) oder daß Teilchen aus anderen Phasenraumzellen in die betrachtete Zelle hineingestreut werden (Gewinn-Term). Diese Effekte werden im **Stoßintegral** $I_{coll}[f(\vec{r}, \vec{p}, t)]$ berücksichtigt. Zusammen mit Gleichung (2.14) ergibt sich die CBUU-Transportgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} \quad &+ \quad \left\{\frac{\vec{p}}{E} + \frac{m^*(\vec{r}, \vec{p})}{E} \vec{\nabla}_p U(\vec{r}, \vec{p})\right\} \vec{\nabla}_r f(\vec{r}, \vec{p}, t) \qquad (2.15) \\ &+ \left\{-\frac{m^*(\vec{r}, \vec{p})}{E} \vec{\nabla}_r U(\vec{r}, \vec{p})\right\} \vec{\nabla}_p f(\vec{r}, \vec{p}, t) \;=\; I_{coll}[f(\vec{r}, \vec{p}, t)]. \end{aligned}$$

Der Stoßterm soll nun analog zu klassischen kinetischen Theorien (Boltzman-Gleichung) [39, 36] eingeführt werden. Die zugrundeliegende Annahme ist der sog. 'Stoßzahlansatz',

der besagt, daß die Zahl der Kollisionen proportional zum Produkt der Einteilchenphasenraumdichten im Ausgangzustand ist. Weiterhin wird die Annahme gemacht, daß die Stöße lokal sind, d.h. die räumlich-zeitliche Entwicklung eines 2-Teilchen-Stoßes klein (kurz) ist im Vergleich zum mittleren Abstand der Nukleonen.
Da neben der Vlasov-Gleichung auch das Stoßintegral $I_{coll}[f(\vec{r},\, \vec{p},\, t)]$ als Funktion der effektiven Massen und Energien formuliert wird (s. u.), stellt Gleichung (2.15) eine Bewegungsgleichung für Quasiteilchen mit effektiven Massen $m^*(\vec{r},\vec{p})$ und effektiven Impulsen p^μ mit $p^0 = E = \sqrt{m^{*2} + \vec{p}^2}$ dar.
Im folgenden wird der Verlust-Term für die Phasenenraumzelle $\vec{r}\epsilon[\vec{r},\ \vec{r}+\Delta\vec{r}]$, $\vec{p_1}\,\epsilon[\vec{p_1},\ \vec{p_1}+\Delta\vec{p}]$ erläutert. Der Gewinn-Term ergibt sich aus analogen Überlegungen. Dazu werden 2-Teilchen Kollisionen vom Typ

$$B_1 + B_2 \rightarrow B_3 + B_4, \tag{2.16}$$

betrachtet. Die B_i $(i = 1, \cdots, 4)$ stehen für die an der Reaktion teilnehmenden Baryonen. Die effektiven Massen sind durch m_i^* und die effektiven Energien und Impulse durch p_i^μ gegeben. Diese Zahl dieser Reaktionen ist proportional zum Produkt der Phasenraumdichten $f(\vec{r},\vec{p_1})$ und $f(\vec{r},\vec{p_2})$ (Stoßzahlansatz), zur Übergangsrate $W(p_1^\mu, p_2^\mu \mid p_3^\mu, p_4^\mu)$ der Reaktion 2.16 und zur δ-Funktion $\delta^4(p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu)$, welche Energie- und Impulserhaltung gewährleistet. Um die Zahl aller möglichen Reaktionen, die zum Verlust-Term beitragen können, zu erhalten, muß man noch über alle möglichen Endzustände (p_3^μ, p_4^μ) integrieren und über die Spin- und Isospinfreiheitsgrade der Teilchen B_3 und B_4 summieren. Genauso muß man alle möglichen Impulskonfigurationen, Spin- und Isospinfreiheitsgrade von Teilchen B_2 in Betracht ziehen und, da hier Fermionensysteme behandelt werden, noch das Pauli-Blocking der Endzustände berücksichtigen. Dies geschieht durch Einfügen der Faktoren $(1 - f(\vec{r},\vec{p_3},t))$ und $(1 - f(\vec{r},\vec{p_4},t))$. Da die Übergangsrate für die Rückreaktion $W(p_3^\mu, p_4^\mu) \mid p_1^\mu, p_2^\mu)$, die zum Gewinn-Term beiträgt, den gleichen Wert wie die Übergangsrate $W(p_1^\mu, p_2^\mu \mid p_3^\mu, p_4^\mu)$ hat, ergibt sich für das Stoßintegral:

$$\begin{aligned}
I_{coll}\,[f_1(\vec{r},\, \vec{p}_1,\, t)] \;&=\; \sum_{2,3,4} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p_2}{E_2} \int \frac{d^3p_3}{E_3} \int \frac{d^3p_4}{E_4} \\
&\times\; W(p_1^\mu, p_2^\mu \mid p_3^\mu, p_4^\mu)\, \delta^4\,(p_1^\mu + p_2^\mu - p_3^\mu - p_4^\mu) \\
&\times\; [f_3(\vec{r},\, \vec{p}_3,\, t)\, f_4(\vec{r},\, \vec{p}_4,\, t)\, (1 - f_1(\vec{r},\, \vec{p}_1,\, t))\, (1 - f_2(\vec{r},\, \vec{p}_2,\, t)) \\
&-\; f_1(\vec{r},\, \vec{p}_1,\, t)\, f_2(\vec{r},\, \vec{p}_2,\, t)\, (1 - f_3(\vec{r},\, \vec{p}_3,\, t))\, (1 - f_4(\vec{r},\, \vec{p}_4,\, t))],
\end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei die Indizes $1, 2, 3, 4$ der Phasenraumdichten die Spin- und Isospinquantenzahlen der Teilchen repräsentieren. Der Faktor g in Gleichung (2.20) berücksichtigt die Spinentartung der an der Reaktion beteiligten Baryonen. Für Nukleon-Nukleon Kollisionen ergibt sich $g = 2$. $\sum_{2,3,4}$ korrespondiert zur Summe über die Isospinfreiheitsgrade der Teilchen B_2, B_3 und B_4.
Es sei noch angemerkt, daß die Übergangsrate $W(p_1^\mu, p_2^\mu \mid p_3^\mu, p_4^\mu)$ im Schwerpunktsystem der beiden stoßenden Teilchen $(\vec{p_1} = -\vec{p_2})$ wie folgt geschrieben werden kann,

$$W(p_1^\mu, p_2^\mu \mid p_3^\mu, p_4^\mu) = v_{12} \frac{d\sigma}{d\Omega} \mid_{B_1 + B_2 \rightarrow B_3 + B_4}, \tag{2.18}$$

wobei $d\sigma/d\Omega$ der differentielle Wirkungsquerschnitt der Reaktion und v_{12} die Relativgeschwindigkeit der Teilchen 1 und 2 ist

$$v_{12} = \mid \frac{\vec{p_1}}{E_1} - \frac{\vec{p_2}}{E_2} \mid . \tag{2.19}$$

Setzt man $d\sigma/d\Omega$ und v_{12} in Gleichung (2.20) ein und integriert über den Betrag es Impulses von Teilchen B_4, so ergibt sich für das Stoßintegral $I_{coll}\,[f_1(\vec{r},\,\vec{p_1},\,t)]$

$$\begin{aligned} I_{coll}\,[f_1(\vec{r},\,\vec{p_1},\,t)] &= \sum_{2,3,4} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p_2}{E_2} \int \frac{d^3p_3}{E_3} \int d\Omega_4 \\ &\times \quad v_{12} \frac{d\sigma}{d\Omega} \mid_{B_1+B_2 \to B_3+B_4} \delta^3\,(\vec{p_1} + \vec{p_2} - \vec{p_3} - \vec{p_4}) \\ &\times \quad [f_3(\vec{r},\,\vec{p_3},\,t)\,f_4(\vec{r},\,\vec{p_4},\,t)\,(1 - f_1(\vec{r},\,\vec{p_1},\,t))\,(1 - f_2(\vec{r},\,\vec{p_2},\,t)) \\ &- \quad f_1(\vec{r},\,\vec{p_1},\,t)\,f_2(\vec{r},\,\vec{p_2},\,t)\,(1 - f_3(\vec{r},\,\vec{p_3},\,t))\,(1 - f_4(\vec{r},\,\vec{p_4},\,t))]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Neben 2-Teilchen Kollisionen vom Typ (2.16) wird im CBUU-Modell auch die Produktion von Resonanzen in Meson-Nukleon Kollisionen (z.B. $\pi N \to \Delta(1232)$) betrachtet. Die Kollisionsintegrale für Prozesse dieser Art ergeben sich, bis auf Änderungen des Endzustandsphasenraums, direkt aus Gleichung (2.20). Geiches gilt für die Beschreibung des Umkehrprozesses, nämlich des Zerfalls einer Resonanz in einen 2-Teilchen-Endzustand. Hier wird in Gleichung (2.17) die Übergangswahrscheinlichkeit W durch die Zerfallswahrscheinlichkeit der entsprechenden Resonanz ersetzt und die Phasenraumintegrationen, die Spin- und Isospinsummationen und die energie- und impulserhaltende δ-Funktion entsprechen angepaßt.

2.3.1 Elementare Reaktionen

Bei der Beschreibung niederenergetischer Schwerionenstöße ist es ausreichend, sich auf die elastischen Nukleon-Nukleon-Stöße zu beschränken. Bei Einschußenergien oberhalb der Pionenproduktionsschwelle müssen auch inelastische Prozesse wie direkte Mesonenproduktion in Nukleon-Nukleon Kollisionen oder die Anregung und der Zerfall höher liegender baryonischer Resonanzen mit in die Beschreibung einbezogen werden.
Im CBUU-Modell werden folgende Mesonen explizit propagiert: π, η, ρ und ein skalares σ-Meson, das korrelierte 2π-Paare mit Isospin 0 beschreibt. Neben dem Nukleon und dem $\Delta(1232)$ enthält das Modell die folgenden baryonischen Resonanzen mit Massen bis zu 1950 MeV/c^2: $N(1440)$, $N(1520)$, $N(1535)$, $\Delta(1600)$, $\Delta(1620)$, $N(1650)$, $\Delta(1675)$, $N(1680)$, $\Delta(1700)$, $N(1720)$, $\Delta(1905)$, $\Delta(1910)$ und $\Delta(1950)$. Die verwendeten Resonanzmassen, Zerfallsbreiten und partiellen Zerfallswahrscheinlichkeiten sind in Übereinstimmung mit der 'Particle Data Group' PDG [49] gewählt.
Für jede Teilchensorte wird eine entsprechende Phasenraumdichte eingeführt. Jede dieser Phasenraumdichten gehorcht einer Gleichung äquivalent zu Gleichung (2.15). Da die verschiedenen Teilchensorten miteinander wechselwirken, sind die verschiedenen Integro-Differentialgleichungen (2.15) durch die Stoßintegrale miteinander gekoppelt. Schematisch läßt sich dieser Satz gekoppelter Gleichungen wie folgt schreiben:

$$Df_N = I_{coll}[f_N, f_{\Delta(1232)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi, f_\rho, f_\eta, f_\sigma]$$

$$
\begin{aligned}
Df_{\Delta(1232)} &= I_{coll}[f_N, f_{\Delta(1232)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi] \\
... &= ... \\
Df_{N(1535)} &= I_{coll}[f_N, f_{\Delta(1232)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi, f_\rho, f_\eta, f_\sigma] \\
Df_{\Delta(1600)} &= I_{coll}[f_N, f_{\Delta(1232)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi, f_\rho, f_\sigma] \\
.. &= .. \\
Df_{\Delta(1950)} &= I_{coll}[f_N, f_{\Delta(1232)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi, f_\rho, f_\sigma] \\
Df_\pi &= I_{coll}[f_N, f_{\Delta(1232)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi, f_\rho, f_\sigma] \\
Df_\eta &= I_{coll}[f_N, f_{N(1535)}] \\
Df_\rho &= I_{coll}[f_N, f_{N(1440)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi] \\
Df_\sigma &= I_{coll}[f_N, f_{N(1440)}, ..., f_{\Delta(1950)}, f_\pi],
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

wobei Df die jeweilige Vlasov-Gleichung darstellt. Die Kollisionsintegrale der Gleichungen (2.21) haben dieselbe Gestalt wie das Kollisionsintgegral (2.20).
Im Anschluß werden alle im CBUU-Modell implementierten elementaren Reaktionen aufgelistet. Eine detailierte Beschreibung der verwendeten Wirkungsquerschnitte befindet sich in Kapitel 4. Dabei werden die Nukleonen mit N bezeichnet und die baryonischen Resonanzen einschließlich des $\Delta(1232)$ mit R bzw. R':

- elastische Baryon-Baryon Kollisionen

$$
\begin{aligned}
NN &\leftrightarrow NN \\
NR &\leftrightarrow NR
\end{aligned}
$$

  Für den elastischen NN-Wirkungsquerschnitt wird eine Parametrisierung von Cugnon [37, 50] verwendet. Zur Beschreibung der elastischen NR-Streuung wird ein invarantes Matrixelement verwendet, das aus dem Wirkungsquerschnitt der elastischen NN-Streuung extrahiert wird. Neben elastischen NR-Kollisionen sind auch Kollisionen erlaubt, in denen sich die Masse der baryonischen Resonanz entsprechend ihrer Verteilungsfunktion (s. Kapitel 4.8) verändert.

- inelastische Baryon-Baryon Kollisionen

$$
\begin{aligned}
NN &\leftrightarrow NR \\
NR &\leftrightarrow NR' \\
NN &\leftrightarrow \Delta(1232)\Delta(1232)
\end{aligned}
$$

  Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes der Reaktion $NN \leftrightarrow N\Delta(1232)$ wird ein Mesonaustauschmodell von Dimitriev und Sushkov [51] verwendet. Der inelastische $NN \leftrightarrow NR$-Wirkungsquerschnitt für die höheren baryonischen Resonanzen wird im Rahmen eines einfachen Resonanzmodells bestimmt. Details dieses Modells werden in Kapitel 4 vorgestellt. Die verwendeten Parametrisierungen des $NN \leftrightarrow \Delta(1232)\Delta(1232)$-Wirkungsquerschnittes stammen von Huber und Aichelin [52].

- inelastische Meson-Baryon Kollisionen

$$
R \leftrightarrow N\pi
$$

$$
\begin{aligned}
R &\leftrightarrow N\pi\pi \\
&\leftrightarrow \Delta(1232)\pi,\ N(1440)\pi,\ N\rho,\ N\sigma \\
N(1535) &\leftrightarrow N\eta \\
NN &\leftrightarrow NN\pi
\end{aligned}
$$

Neben der Produktion und Absorption in Baryon-Baryon Kollisionen können baryonische Resonanzen auch in Meson-Baryon Kollisionen bevölkert werden. Angeregte Resonanzen können anschließend wieder in Mesonen und Baryonen zerfallen. Der 2π-Zerfall der höheren baryonischen Resonanzen wird durch sequentielle 2-Körper-Zerfälle dargestellt; wie weiter oben angedeutet. Eine detailierte Diskussion der entsprechenden Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten befindet sich in Kapitel 4.2.

- Meson-Meson Kollisionen

$$
\begin{aligned}
\rho &\leftrightarrow \pi\pi \quad \text{(p-Welle)} \\
\sigma &\leftrightarrow \pi\pi \quad \text{(s-Welle)}
\end{aligned}
$$

Zur Beschreibung der rein mesonischen Wirkungsquerschnitte wird eine Breit-Wigner Parametrisierung verwendet (s. Kapitel 4.3.1).

Kapitel 3

Einteilchen-Potentiale

Ziel dieses Kapitels ist es, die im CBUU-Modell verwendeten Einteilchen-Potentiale vorzustellen. Dazu wird zuerst der Begriff des Mittleren-Feld-Potentials im Rahmen der Hartree-Fock-Näherung näher erläutert, bevor nicht-relativistische Parametrisierungen der Einteilchen-Potentiale für Nukleonen dargelegt werden. Anschließend wird die Behandlung der Mittleren-Feld-Potentiale im Rahmen eines kovarianten Transportmodells untersucht. Die hier gewonnenen Erkenntnisse ermöglichen es, kovariante Einteilchen-Potentiale ausgehend von nicht-relativistischen Parametrisierungen zur Verwendung im Rahmen des CBUU-Modells abzuleiten.

3.1 Nicht-relativistische Mittlere-Feld-Potentiale

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels soll der Begriff des Mittleren-Feld-Potentials (MFP) erläutert werden. Dabei wird skizziert, wie die MFP in der Hartree-Fock-Näherung aus einem Vielteilchen-Hamiltonoperator resultieren. Außerdem wird gezeigt wie sich die Impulsabhängigkeit des optischen Potentials der Nukleonen, das dem MFP entspricht, aus der Nichtlokalität der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung ergibt.

3.1.1 Grundlagen

Ausgangspunkt der Mittleren-Feld-Modelle ist eine Zweiteilchenwechselwirkung endlicher Reichweite $v(\vec{r},\vec{r'})$, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß $v(\vec{r},\vec{r'})$ nicht explizit spinabhängig sei. Dann wird ein System von A miteinander wechselwirkenden Teilchen (speziell Nukleonen) [53, 54] durch die Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned} H\Phi(\vec{r_1},\vec{r_2},\cdots\vec{r_A}) &\equiv E\Phi(\vec{r_1},\vec{r_2},\cdots\vec{r_A}) \\ &= (\sum_{i=1}^{A} t_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{A} v(\vec{r_i},\vec{r_j}))\Phi(\vec{r_1},\vec{r_2},\cdots\vec{r_A}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

beschrieben, wobei H und Φ den Hamiltonoperator bzw. die Wellenfunktion des A-Teilchen-Systems darstellen. Der Einteilchen-Operator t_i bestimmt die kinetische Energie eines Teilchens und beim Zweiteilchenoperator $v(\vec{r_i},\vec{r_j})$ handelt es sich um die oben erwähnte Zweiteilchenwechselwirkung.

Die Mittleren-Feld-Potentiale erhält man in der Hartree-Fock-Näherung [53, 54]. In dieser Näherung wird die A-Teilchen-Wellenfunktion im allgemeinen als antisymmetrisiertes Produkt der A Einteilchen-Wellenfunktionen $\phi_i(\vec{r})$ angesetzt. Wird mit diesem Ansatz der normierte Energieerwartungswert des Gesamtsystems

$$E \equiv \frac{< \Phi(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_A} \mid H \mid \Phi(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_A}) >}{< \Phi(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_A} \mid \Phi(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_A}) >} \tag{3.2}$$

mittels einer Variation der Wellenfunktion Φ minimiert, so ergeben sich die Hartree-Fock-Gleichungen für die Einteilchen-Wellenfunktionen $\phi_i(\vec{r})$, die in der Ortsraumdarstellung lauten: $(k = 1, \cdots, A)$

$$\hat{t}\phi_k(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{A} \int d^3r' v(\vec{r}, \vec{r'}) \phi_j^*(\vec{r'}) \left\{ \phi_j(\vec{r'})\phi_k(\vec{r}) - \phi_j(\vec{r})\phi_k(\vec{r'}) \right\} = \epsilon_k \phi_k(\vec{r}). \tag{3.3}$$

Diese Gleichungen entsprechen A nichtlinearen Schrödinger-Gleichungen für die Einteilchen-Wellenfunktionen $\phi_k(\vec{r})$. Man definiert die Dichte,

$$\rho(\vec{r'}) = \sum_{j=1}^{A} \mid \phi_j(\vec{r}) \mid^2, \tag{3.4}$$

wobei die Θ-Funktion sicherstellt, daß nur Zustände unterhalb der Fermienergie ϵ_F zur Teilchendichte und somit zum Mittleren-Feld-Potential beitragen. Mit Hilfe dieser Definition läßt sich der direkte Anteil von Gleichung (3.3) in das lokale Hartree-Potential umformen,

$$U_H(\vec{r}) = \int dr' v(\vec{r}, \vec{r'}) \rho(\vec{r'}), \tag{3.5}$$

während das nicht-lokale Fock-Potential analog aus dem Austauschterm von Gleichung (3.3) folgt,

$$U_F(\vec{r}, \vec{r'}) = -v(\vec{r}, \vec{r'}) \sum_{j=1}^{A} \phi_j^*(\vec{r}) \phi_j(\vec{r'}). \tag{3.6}$$

Unter Verwendung dieser Potentiale lassen sich die Hartree-Fock-Gleichungen (3.3) in folgender Form schreiben,

$$\hat{t}\phi_k(\vec{r}) + U_H(\vec{r})\phi_k(\vec{r}) + \int d^3r' U_F(\vec{r}, \vec{r'}) \phi_k(\vec{r'}) = \epsilon_k \phi_k(\vec{r}) \tag{3.7}$$

$(k = 1, \cdots, A)$ oder äquivalent,

$$\hat{t}\phi_k(\vec{r}) + \int d^3r' U_{HF}(\vec{r}, \vec{r'}) \phi_k(\vec{r'}) = \epsilon_k \phi_k(\vec{r}), \tag{3.8}$$

mit dem Hartree-Fock-Potential

$$U_{HF}(\vec{r}, \vec{r'}) = U_H(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r'}) + U_F(\vec{r}, \vec{r'}). \tag{3.9}$$

Anhand der Gleichungen (3.7) und (3.8) wird der Einteilchen-Charakter der Hartree-Fock Näherung offensichtlich: Die Nukleonen, beschrieben durch die Wellenfunktionen

$\phi_k(\vec{r})$ $(k = 1, \cdots, A)$, bewegen sich unabhängig von einander in dem durch die Wechselwirkung aller Nukleonen miteinander erzeugten Mittleren-Feld-Potential U_{HF}.
Untersucht man die Mittlere-Feld-Potentiale im Grenzfall unendlicher Kernmaterie oder in der Lokalen-Dichte-Näherung (LDA), so entsprechen die Einteilchen-Wellenfunktionen $\phi_k(\vec{r})$ den ebenen Wellen

$$\phi_k(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{3.10}$$

Weiterhin hängt wegen der Translationsinvarianz das MFP U_{HF} nur von der Differenz der Argumente $\vec{r}$ und $\vec{r'}$ ab. Der Anteil der Hartree-Fock-Gleichungen, der die potentielle Energie oder den Realteil der Selbstenergie (wenn im folgenden von Selbsenergie gesprochen wird, ist immer nur der Realteil der Selbsenergie gemeint) $\Sigma(\vec{r})$ der Teilchen beschreibt, hat in der LDA folgende Gestalt

$$\Sigma_{HF} \equiv \int d^3r' \, U_{HF}(\vec{r}, \vec{r'})\phi_k(\vec{r'}) = \int d^3r' \, U_{HF}(\vec{r} - \vec{r'})e^{i\vec{k}\vec{r'}}. \tag{3.11}$$

Führt man die Ortsraumintegration anstatt über $\vec{r'}$ über die Koordinate $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$ aus, so ergibt das Integral (3.11) die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} \Sigma_{HF} &= \int d^3R \; U_{HF}(\vec{R})e^{i\vec{k}\vec{R}}e^{i\vec{k}\vec{R}} \\ &= U_{HF}(k)\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \equiv U_{HF}(k)\, \phi_k(\vec{r}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Setzt man für U_{HF} Gleichung (3.9) ein und ersetzt die Summation über diskrete Teilchenzustände in den Gleichungen (3.3), (3.4) und (3.9) durch eine Integration über kontinuierliche Impulszustände,

$$\sum_{j=1}^{A} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_F} d^3k, \tag{3.13}$$

so erhält man für den lokalen Hartree-Anteil des Integrals (3.11),

$$\Sigma_H = \int d^3r' \, U_H(\vec{r}) \, \delta(\vec{r} - \vec{r'}) \, \phi_k(\vec{r'}) = v(k = 0) \, \rho(\vec{r}). \tag{3.14}$$

Für den nicht lokalen Fock-Anteil ergibt sich,

$$\begin{aligned} \Sigma_F &= \int d^3r' \, U_F(\vec{r}, \vec{r'})\phi_k(\vec{r'}) \qquad (3.15) \\ &= -\int d^3r' \, v(\vec{r} - \vec{r'}) \sum_{j=1}^{A} \phi_j^*(\vec{r'})\phi_j(\vec{r})\phi_i(\vec{r'}) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \int d^3r' \, v(\vec{r} - \vec{r'})e^{-i\vec{k'}(\vec{r}-\vec{r'})} \, e^{i\vec{k}\vec{r'}}. \end{aligned}$$

Mit der Transformation auf die Koordinate $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$ (s. o.) erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma_F &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \int d^3R \, v(\vec{R})e^{i\vec{k'}\vec{R}} \, e^{i\vec{k}\vec{r'}} \qquad (3.16) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \int d^3R \, v(\vec{R})e^{i(\vec{k'}-\vec{k})\vec{R}} \, e^{i\vec{k}\vec{r}} \\ &\equiv \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3k' v(\vec{k'} - \vec{k}) \, e^{i\vec{k}\vec{r}}, \end{aligned}$$

mit

$$v(\vec{k'}-\vec{k}) = \int d^3R v(\vec{R})\, e^{i(\vec{k'}-\vec{k})\vec{R}}. \tag{3.17}$$

Zusammenfassend stellt man fest, daß das Mittlere-Feld-Potential (bzw. die Selbstenergie eines Teilchens) im Grenzfall unendlicher Kernmaterie oder in der Lokalen Dichte Näherung auch vom Impuls $\vec{k}$ des Teilchens abhängt. Während der Hartree-Anteil der Selbstenergie (in der betrachteten Näherung),

$$\Sigma_H(\vec{k}) = v(k=0)\rho(\vec{r}) \tag{3.18}$$

nicht vom Impuls abhängt, ist der Austauschanteil der Selbstenergie immer explizit vom Teilchenimpuls abhängig,

$$\Sigma_F(\vec{k}) = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3k' v(\vec{k'}-\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{3.19}$$

Da sich die gesamte Selbstenergie eines Teilchens aus Σ_H umd Σ_F zusammensetzt, ist jede Nukleon-Selbstenergie auch explizit impulsabhängig,

$$\Sigma(\vec{r},\vec{k}) = \Sigma_H(\vec{r}) + \Sigma_F(\vec{r},\vec{k}). \tag{3.20}$$

3.1.2 Parametrisierungen

In diesem Abschnitt werden Parametrisierungen von nicht-relativistischen Mittleren-Feld-Potentialen vorgestellt, welche in Transportrechnungen Verwendung finden. Bei diesen Potentialen handelt es sich um Funktionale, die von der Phasenraumdichte der Baryonen $f(\vec{r},\vec{p})$ bzw. von der Baryonendichte $\rho(\vec{r})$ abhängen. Die Dichte $\rho(\vec{r})$ erhält man aus der Phasenraumdichte, indem man diese über den Impuls $\vec{p}$ integriert und über die Spin- S und Isospinfreiheitsgrade I summiert

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{I,S}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\,p\, f_{I,S}(\vec{r},\vec{p}). \tag{3.21}$$

Der dem Faktor $1/(2\pi)^3$ ist die Phasenraum-Normierungskonstante.
Für jede Parametrisierung wird die potentielle Energiedichte V und das Einteilchen-Potential U angegeben, das sich aus V durch Variation nach $f(\vec{r},\vec{p})$ bzw. $\rho(\vec{r})$ (siehe. Gleichung (3.4)) ergibt.

Das Skyrme-Potential

Die einfachste Parametrisierung für das Mittlere-Feld-Potential erhält man unter der Annahmne, daß sowohl die potentielle Energiedichte als auch das Einteilchen-Potential nur von der Dichte $\rho(\vec{r})$ abhängen [55, 58, 56],

$$V(\rho) = \frac{A}{2}\frac{\rho^2}{\rho_0} + \frac{B}{\tau+1}\frac{\rho^{\tau+1}}{\rho_0^\tau}, \tag{3.22}$$

$$U(\rho) = \frac{\partial V}{\partial \rho} = A\,\frac{\rho}{\rho_0} + B\,\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\tau}. \tag{3.23}$$

Dieses Einteilchen-Potential erhält man in der Hartree-Näherung unter Verwendung einer punktförmigen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung bestehend aus einem Zweiteilanteil und aus einer Wechselwirkung, die Vielteilcheneffekte in Betracht zieht. Die Zweiteilchenwechselwirkung führt in V zu Termen proportional zu ρ, während die Terme proportional zu $\rho^{\tau+1}$ aus der Mehrteilchenwechselwirkung herrühren. Die Parameter A, B und τ werden an Bindungsenergie, die Saturationsdichte ρ_0 und die gewünschte Kompressibilität K (s. Abschnitt 3.3.2) von Kernmaterie angepaßt.
Erweiterungen der Einteilchen-Potentiale (3.23) können explizit spin- und isospinabhängige Koeffizienten erhalten. Bei diesen Ansätzen ist jedoch zu bemerken, daß sie zwar recht gut Radien und Bindungsenergien von Kernen reproduzieren, jedoch, aufgrund fehlender Impulsabhängigkeit, zur Beschreibung elastischer Nukleon-Kern-Streuung ungeeignet sind.

Impulsabhängige Potentiale

Eine realistische Parametrisierung des Mittleren-Feld-Potentials der Nukleonen sollte die experimentelle Impulsabhängigkeit des Realteils des optischen Potentials des Nukleons wiedergeben. Wenn im folgenden von der Abhängigkeit des Einteilchen-Potentials vom Impuls $\vec{p}$ gesprochen wird, so ist damit der Impuls des Nukleons relativ zu dem es umgebenden Medium gemeint. Eine entsprechende Parametrisierung wurde von Welke et al. [58, 59] vorgeschlagen:

$$V(\rho) = \frac{A}{2}\,\frac{\rho^2}{\rho_0} + \frac{B}{\tau+1}\,\frac{\rho^{\tau+1}}{\rho_0^{\tau}} + \frac{C}{\rho_0}\sum_{I,S}\sum_{I',S'}\int\!\!\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\,\frac{f(\vec{r},\vec{p})\,f(\vec{r},\vec{p'})}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2}, \tag{3.24}$$

$$U(\rho,\vec{p}) = A\,\frac{\rho}{\rho_0} + B\,\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\tau} + \frac{2C}{\rho_0}\sum_{I',S'}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\,\frac{f(\vec{r},\vec{p'})}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2}. \tag{3.25}$$

Diese Parametrisierung stellt offensichtlich eine Erweiterung der Skyrme-Parametrisierung (3.22,3.23) um einen Anteil dar, mit dessen Hilfe - durch Anpassen der neuen Parameter C und Λ - die experimentell beobachtete Impulsabhängigkeit reproduziert werden kann. Dieser impulsabhängige Anteil des Potentials entspricht der Integration eines nicht-relativistischen Propagators skalarer Austauschmesonen über die nukleonische Phasenraumdichte. Dies soll nun am Beispiel des Yukawa-Potentials verdeutlicht werden.
In der Yukawa-Theorie wird die Zweiteilchenwechselwirkung durch den Austausch u.a. skalarer Mesonen der Masse μ beschrieben:

$$v(\vec{r},\vec{r'}) \sim \frac{e^{\mu|\vec{r}-\vec{r'}|}}{\mu\mid\vec{r}-\vec{r'}\mid}. \tag{3.26}$$

Entsprechend den Gleichungen (3.11) und (3.12) hat die Selbstenergie in der Hartree-Fock-Näherung die Form

$$\Sigma_{HF}(\vec{k}) = U(\vec{k})\phi_k(\vec{r}) \;=\; \int d^3r'\,U(\vec{r},\vec{r'})\,\phi_k(\vec{r'}) \tag{3.27}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k'\, v(\vec{k}-\vec{k'})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}, \qquad (3.28)$$

wobei $\phi(\vec{r'}) \sim e^{i\vec{k}\vec{r'}}$ in lokaler Dichte Näherung angenommen wurde. Durch Einführung neuer Variablen $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$ und $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k'}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} v(\vec{K}) &= -\int d^3R\, v(\vec{R})\, e^{i\vec{K}\vec{R}} \\ &= -\int d^3R\, \frac{e^{\mu|\vec{R}|}}{\mu \mid \vec{R} \mid}\, e^{i\vec{K}\vec{R}} \\ &= -\frac{2\pi}{\mu}\int dR\, R^2 \int dcos\Theta\, \frac{e^{-\mu R}}{R}\, e^{iKRcos\Theta} \\ &= -\frac{4\pi}{\mu}\int dR\, e^{-\mu R}\, \frac{sin(KR)}{K}. \qquad (3.29) \end{aligned}$$

In [60] findet man für das Integral:

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax} sin(xy) = \frac{y}{a^2+y^2} \quad \text{mit } a > 0.$$

Für $v(\vec{K})$ ergibt sich somit

$$v(\vec{K}) = -\frac{4\pi}{\mu}\frac{1}{\mu^2+\vec{K}^2} = const.\, \frac{1}{1+\left(\frac{\vec{K}}{\mu}\right)^2}. \qquad (3.30)$$

Einsetzen von $v(\vec{K})$ in (3.28) ergibt eine impulsabhängige Selbstenergie $\Sigma(\vec{k})$, die die gleiche funktionale Form hat wie der impulsabhängige Anteil von (3.25). Während in (3.28) die Wellenfunktion gefaltet mit (3.30) integriert wird, handelt es sich bei (3.25) um eine Faltung mit der klassischen Phasenraumdichte.

An dieser Stelle ist folgendes zu bemerken:
Die nicht-relativistischen Parametrisierungen der Einteilchen-Potentiale gelten im Grenzfall unendlicher Kernmaterie bzw. für ein System, in dem die Kernmaterie ruht, d.h. in welchem die räumlichen Komponenten des Viererbaryonenstroms verschwinden ($\vec{j} \equiv \vec{0}$). Hier gilt für ein Teilchen der Masse m, das sich mit Impuls $\vec{p}$ am Ort $\vec{r}$ bewegt, die Dispersionsrelation

$$E(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + U(\rho(\vec{r}), \vec{p}). \qquad (3.31)$$

Bei der Simulation von Schwerionenkollisionen ist die Berechnung der Potentiale im Ruhesystem der Kerne nicht möglich, da die beiden Kerne sich aufeinander zubewegen und sich die Nukleonen beider Kerne in der Kollisionsphase durchmischen. Daher nimmt man üblicherweise in Transportrechnungen [56, 35, 58] an, daß $\beta_{CMS} \ll 1$ gilt, und berechnet sowohl die Baryonendichte als auch die Einteilchen-Potentiale im Schwerpunktsystem der Schwerionenreaktionen (CMS). Diese Näherung ist für kleine Einschußenergien gerechtfertigt. Für Einschußenergien im SIS-Bereich von $1-2$ AGeV verliert diese Näherung jedoch an Gültigkeit. Während man bei einer Energie von 0.4 AGeV ein β von 0.4 im CMS erhält, erhöht es sich bei 1 AGeV auf 0.6 und bei 2 AGeV auf 0.72. Diese Werte für β führen in der Anfangsphase einer Schwerionenkollision, in der sich die beiden Kerne gleichförmig aufeinander zu bewegen, Lorentz-Faktoren γ von 1.1, 1.23 und 1.44. Dies bedeutet, daß - zumindest in der Anfangsphase - die Einteilchen-Potentiale aus Baryonendichten berechnet werden, die aufgrund der Lorentz-Kontraktion um $20-40\%$! erhöht sind. Die obige Näherung erhält in der Hochdichtephase einer zentralen Schwerionenreaktion wiederum Gültigkeit, da hier die Kernmaterie im wesentlichen im CMS ruht. In der Expansionsphase einer Schwerionenkollision oder beim Auftreten von Flußphänomenen wie z.B. dem 'squeeze-out' oder dem transversalem Fluß unterscheidet sich das CMS allerdings wieder vom System, in dem lokal $\vec{j}=\vec{0}$ gilt, und somit verfälschen die oben genannten Effekte auch hier die Berechnung der Potentiale signifikant.

3.2 Die kovariante Transportgleichung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Begriff des Mittleren-Feld-Potentials bzw. der Selbstenergie am Beispiel von nicht-relativistischen Potentialen eingeführt. Da diese Potentiale aus Lösungen der Schrödinger-Gleichung hervorgehen, ist das Verhalten unter Lorentztransformationen nicht eindeutig vorgegeben. In diesem Abschnitt wird nun die Ableitung einer kovarianten Transportgleichung für die Phasenraumdichte der Nukleonen, die Potentiale mit eindeutigem Transformationsverhalten enthält, skizziert. Die vollständige Herleitung dieser Gleichung ist in [45, 61] zu finden.
Ausgangspunkt ist eine Dirac-Gleichung für die Nukleonenspinoren Ψ, in der die auftretenden Potentiale sowohl lokale als auch nicht lokale Anteilen besitzen:

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\,\Psi(x) - U^{MF}(x)\Psi(x) - \int d^4y\, U^{MD}(x,y)\Psi(y) = 0. \qquad (3.32)$$

Hier ist zu beachten, daß im Gegensatz zu den Ausführungen im letzten Abschnitt die Zeitkoordinate in gleicher Weise behandelt wird wie die räumlichen Koordinaten. x und y repräsentieren demnach Vierervektoren ($x=(t,\vec{r})$, $y=(t',\vec{r'})$). $U^{MF}(x)$ entspricht einem lokalen Potential analog zum Hartree-Potential, wie es in Abschnitt 3.1 eingeführt wurde. Dieses Potential $U^{MF}(x)$ wird nun nach der Clifford-Algebra [62] entwickelt. Unter der Annahme, daß mit Gleichung (3.32) spingesättigte Systeme mit guter Parität beschrieben werden, enthält U^{MD} nur skalare (U_s) und vekorielle (U_v^μ, $\mu=0,\cdots,3$) Komponenten, d.h.

$$U^{MF}(x) = U_s(x) + \gamma_\mu U_v^\mu(x). \qquad (3.33)$$

In Ref. [45] werden U_s und U_v^μ aus der Hartree-Näherung des nichtlinearen Walecka-Modells [63] bestimmt. Die skalare Selbstenergie ist hier proportional zu einem effektiven skalaren Mesonenfeld und die Vektorselbstenergie wird entsprechend durch den Austausch effektiver Vektormesonen bestimmt. Auf die genaue Form der Potentiale wird im folgenden nicht weiter eingegangen, da sie für die Ableitung der Transportgleichung ohne Bedeutung ist.
Für den impulsabhängigen Teil des Potentials wird analog eine Kombination aus skalarem und vektoriellem Anteil verwendet,

$$U^{MD}(x,y) = U_s^{MD}(x,y) + \gamma_\mu U_v^{MD\mu}(x,y) \qquad (3.34)$$

mit

$$
\begin{aligned}
U_s^{MD}(x,y) &= c_s\, D_s^{MD}(x-y)\, \left\langle \bar{\Psi}(y)\Psi(x)\right\rangle \\
U_{v\mu}^{MD}(x,y) &= c_v\, D_v^{MD}(x-y) \left\langle \bar{\Psi}(y)\gamma_\mu \Psi(x)\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Gleichung (3.35) stellt einen allgemeinen Ansatz dar, mit dem, in Anlehnung an experimentelle Befunde, sowohl die Werte der Konstanten c_s und c_v als auch die funktionale Abhängigkeit von D_s und D_v bestimmt werden können.
Unter Ausnutzung von Identitäten für die Wigner-Tranformierte von $U^{MD}(x,y)$ [45] erhält man,

$$
\begin{aligned}
U_s^{MD}(x,p) &= \frac{4}{(2\pi)^3}\, c_s \int d^4p'\, D_s^{MD}(p-p')\, m^\star(x,p') f(x,p') \\
U_\mu^{vMD}(x,p) &= \frac{4}{(2\pi)^3}\, c_v \int d^4p'\, D_v^{MD}(p-p')\, \Pi_\mu(x,p') f(x,p').
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Mit den impulsabhängigen effektiven Massen und Impulsen

$$
\begin{aligned}
m^\star(x,p) &= m + U_s(x) + U_s^{MD}(x,p) \\
\Pi^{\star\mu}(x,p) &= p^\mu - U_v^\mu(x) - U_v^{MD\mu}(x,p).
\end{aligned}
$$

In Gleichung (3.36) ist $f(x,p)$ die Phasenraumdichte der Nukleonen, die hier von den Vierervektoren x und p abhängt. Die Funktionen $D_{s,v}^{MD}(p-p')$ sind über die Fourier-Transformierte

$$
D_{s,v}^{MD}(p-p') \equiv \int d^4z\; D_{s,v}^{MD}(z)\; e^{iz\cdot(p-p')}
\tag{3.37}
$$

definiert.
In Anlehnung an die Hartree-Fock-Näherung des Walecka-Modells [63] werden für D_s und D_v funktionale Abhängigkeiten gewählt, die effektiven Mesonenpropagatoren entsprechen,

$$
\begin{aligned}
D_s^{MD}(p-p') &= \frac{\Lambda_s^2}{\Lambda_s^2-(p-p')^2} \\
D_v^{MD}(p-p') &= \frac{\Lambda_v^2}{\Lambda_v^2-(p-p')^2},
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

wobei die freien Parameter Λ_s und Λ_v an die experimentellen Daten angepaßt werden [64]. An dieser Stelle soll bemerkt werden, daß die impulsabhängigen Potentiale eine ähnliche funktionale Form haben wie der nicht-relativistische Ansatz von Welke et al. (Abschnitt 3.1.2). Die Potentiale ergeben sich wiederum als Impulsraumintegration über eine Propagatorfunktion. Im nicht-relativistischen Fall handelt es sich um eine dreidimensionale Integration über eine Porpagatorfunktion, die nur einen Dreierimpulsübertrag enthält, während im relativistischen Ansatz sich sowohl die Impulsintegration über die vier Impulskomponenten erstreckt als auch der Propagator den Viererimpulsübertrag enthält.

Diese Methode zur Bestimmung der Mittleren-Feld-Potentiale hat folgende Vorzüge gegenüber den in Abschnitt 3.1.2 vorgestellten nicht-relativistischen Ansätze für die

Selbstenergien: Die dem Ansatz zugrunde liegenden Wechselwirkungen für das nicht impulsabhängige Potential (s. Gleichung (3.33) und die daran anschließenden Ausführungen) und für das impulsabhängige Potential (3.38) sind selbst kovariant und gewährleisten somit, daß die daraus abgeleiteten Einteilchen-Potentiale wohl definierte Eigenschaften unter Lorentztransformationen haben. Dies bedeutet, daß die Potentiale in jedem beliebigen Inertialsystem relativistisch korrekt bestimmt werden können.

Ausgangspunkt der Ableitung der kovarianten Transportgleichung ist die Wignermatrix, die als Wignertransformierte des Erwartungswertes des dyadischen Produktes der Nukleonenspinoren $\bar{\Psi}$ und Ψ definiert ist. Diese Matrix stellt das quantenmechanische Äquivalent zur klassischen Phasenraumdichte dar. Sowohl die skalare Baryonendichte als auch die Vektorstromdichten erhält man durch Spurbildung aus der Wignermatrix. Zusammen mit der Dirac-Gleichung (3.32) ergibt sich aus einer $\hbar \to 0$-Entwicklung in den Gradienten der Potentiale die kovariante relativistische Vlasovgleichung für die klassische Phasenraumdichte $f(x,\, p)$

$$\begin{aligned} \Big\{ & \Big(\Pi_\mu - \Pi_\nu(\partial^p_\mu U^\nu_v) - m^*(\partial^p_\mu U_s)\Big)\, \partial^\mu_x \\ & + \Big(\Pi_\nu(\partial^x_\mu U^\nu_v) \;+\; m^*(\partial^x_\mu U_s)\Big)\, \partial^\mu_p \;\Big\}\, f(x,p) = 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Unter der Annahme, daß die Nukleonen nur skalare und keine vekorielle Selbstenergie ($U^\mu_v \equiv 0,\, \mu = 0, \cdots, 3$) besitzen, reduziert sich Gleichung (3.39) auf den Vlasovteil der CBUU-Transportgleichung, wie sie dem in dieser Arbeit verwendeten Modell zugrunde liegt (s. Gleichung (2.15)).

3.3 Potentiale im CBUU-Modell

In diesem Abschnitt soll beschrieben werden, wie die Potentiale in dem dieser Arbeit zugrunde liegenden CBUU-Modell implementiert sind. Ziel ist es, einerseits die Unzulänglichkeiten, die - wie in Abschnitt 3.1.2 geschildert - auftreten, wenn die Eigenschaften der Einteilchen-Potentiale unter Lorentz-Transformationnen nicht eindeutig definiert sind, zu vermeiden. Andererseits soll das Modell 'numerisch praktikabel' sein, d.h. es soll möglich sein, mit angemessener Rechenzeit Vergleiche mit den experimentellen Daten durchführen zu können.
Die zugrundeliegende Idee ist, mit Hilfe der nicht relativistischen Parametrisierungen des Realteils des optischen Potentials der Nukleonen im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie (LRF), in dem die räumlichen Komponenten des Baryonenstroms verschwinden ($\vec{j} = \vec{0}$), ein skalares Potential zu definieren. Dieses Potential hat dann klar definierte Lorentz-Eigenschaften und kann somit sowohl in der Teilchenpropagation als auch im Stoßterm verwendet werden.

3.3.1 Definition der Einteilchen-Potentiale

Wie im letzten Abschnitt dargelegt, lautet die Dirac-Gleichung für Fermionen, in spingesättigter Kernmaterie mit guter Parität,

$$\Big\{\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - U^v_\mu(x,p)\right) - (m + U^s(x,p))\Big\}\, \Psi(x) = 0. \tag{3.40}$$

Die entsprechende Dispersionsrelation in der Mittleren-Feld-Näherung ist durch

$$E(x,p) = \sqrt{\left(\vec{p} - \vec{U}_v\,(x,p)\right)^2 + \left(m + U_s\,(x,p)\right)^2} + U_v^0(x,p) \qquad (3.41)$$

gegeben.
Im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie (LRF) verschwinden die räumlichen Komponenten des Vektorpotentials ($U_v^i(x,p) = 0,\ i = 1,\,2,\,3$), nach Abschnitt 3.2. Die vektorielle Selbstenergie eines Teilchens ist proportional zur Kopplung an die die Wechselwirkung vermittlenden Baryonensstrom $\sim c_v\,\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$. In der Mittleren-Feld-Näherung wird $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ durch den Erwartungswert $< \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi >$, also durch den Erwartungswert des Baryonenstromes $(\rho, \vec{j})$ ersetzt. Somit ergibt sich im LRF die folgende Dispersionsrelation

$$E(x,p) = \sqrt{\vec{p}^2 + \left(m + U_s\,(x,p)\right)^2} + U_v^0\,(x,p)\,. \qquad (3.42)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Gleichung (3.31), so erkennt man, daß das optische Potential aus nicht-relativistischen Rechnungen im allgemeinen sowohl skalare als auch vektorielle Anteile enthält. Um aus den nicht-relativistischen Parametrisierungen Potentiale mit definierten Lorentz-Eigenschaften zu erhalten, werden diese Potentiale nun so definiert, daß sie im LRF mit der Dispersionsrelation (3.31) übereinstimmen. Hierzu bieten sich drei Möglichkeiten:

1.) Aufteilung des nicht-relativistischen Potentials in ein Vektorpotential und ein skalares Potential. Diese Möglichkeit entspricht dem im letzten Abschnitt vorgestellten Modell. Der Nachteil ist hier, daß die numerische Behandlung sehr aufwendig ist, so daß ein Vergleich mit experimentellen Daten aufgrund mangelnder Statistik nur bedingt möglich ist.

2.) Behandlung des Einteilchen-Potentials als Vektorpotential. Hierbei wird das nicht-relativistische Einteilchen-Potential im LRF der 0-ten Komponente eines Vektorpotentials gleichgesetzt.

3.) Mit Hilfe des nicht-relativistischen Potentials wird ein skalares Potential definiert, das sich unter Lorentz-Transformationen wie eine Masse verhält.

Im CBUU-Modell wird die dritte Möglichkeit gewählt, da diese im Vergleich zu den beiden anderen Möglichkeiten numerisch einfacher zu handhaben ist.
Somit ergibt sich für die Dispersionsrelation eines Baryons, das sich mit dem Viererimpuls p am Ort $\vec{r}$ befindet.

$$E(\vec{r},p) = \sqrt{\vec{p}^2 + (m + U_s(\vec{r},p))^2}. \qquad (3.43)$$

Die explizite Zeitabhängigkeit der Einteilchen-Potentiale wird im folgenden vernachlässigt, da im CBUU-Modell von einer einzigen Zeitkoordinate in allen Inertialsystemen ausgegangen wird. Das skalare Potential U_s wird **immer im LRF** bestimmt. Dazu wird im LRF die Dispersionsrelation (3.43) mit der Dispersionsrelation, die das nicht relativistische Potential U_{nr} (3.31) enthält, gleichgesetzt:

$$\sqrt{\vec{p}_{lrf}^{\,2} + m^{\star\,2}} \equiv \sqrt{\vec{p}_{lrf}^{\,2} + m^2} + U_{nr}(\rho_{lrf}(\vec{r}), \vec{p}_{lrf}). \qquad (3.44)$$

Die effektive Masse $m^\star$ eines Teilchens ergibt sich aus der Summe seiner Ruhemasse m und seines skalaren Potentials

$$m^\star = m + U_s(\rho_{lrf}(\vec{r}), \vec{p}_{lrf}). \tag{3.45}$$

Bei $\vec{p}_{lrf}$ und $\rho_{lrf}(\vec{r})$ handelt es sich um den Impuls des Teilchens im LRF bzw. die Baryonendichte am Ort des Teilchens im LRF. ρ_{lrf} ergibt sich in jedem Inertialsystem als die Norm des Baryonenstroms j^μ $(\mu = 0, \cdots, 3)$,

$$\rho_{lrf}(\vec{r}) = \sqrt{\rho(\vec{r})^2 - \vec{j}(\vec{r})^2}. \tag{3.46}$$

Auflösen der Gleichung (3.44) nach U_s ergibt

$$\begin{aligned} &U_s(\rho_{lrf}(\vec{r}), \vec{p_{lrf}}) = \\ &\sqrt{\left(U_{nr}(\rho_{lrf}(\vec{r}), \vec{p}_{lrf}) + \sqrt{\vec{p}^{\,2}_{lrf} + m^2}\right)^2 - \vec{p}^{\,2}_{lrf}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß das skalare Potential U_s, entsprechend der Definition über das nicht-relativistische Potential U_{nr}, im LRF nur von den räumlichen Komponenten des Teilchenimpulses abhängt. In jedem anderen Inertialsystem kommt jedoch eine implizite Energieabhängigkeit hinzu, die sich aus der Lorentz-Transformation zwischen dem LRF und dem entsprechenden Inertialsystem ergibt. Ferner wird durch die Bestimmung des skalaren Potentials im LRF erreicht, daß man ein Potential mit definierten Eigenschaften unter Lorentz-Transformationen erhält, obwohl die zugrundeliegende Zweiteilchenwechselwirkung nicht kovariant ist.

3.3.2 Bestimmung der Parameter

Zur Bestimmung des skalaren Potentials U_s im LRF werden die in Abschnitt 3.1.2 angegebenen nicht-relativistischen Parametrisierungen (3.23) und (3.25) des Einteilchen-Potentials verwendet. Die dort auftretenden Parameter werden an die Saturationseigenschaften von Kernmaterie und die experimentell gefundene Impulsabhängigkeit des Realteils des optischen Nukleonenpotentials angepaßt.
Ausgangspunkt ist die Energiedichte

$$H(\vec{r}) = \sum_{I,S} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\, f_{I,S}(\vec{r}, \vec{p}) + V(\rho(\vec{r})), \tag{3.48}$$

wobei $f(\vec{r}, \vec{p})$ die Phasenraumdichte der Nukleonen ist. $\vec{p}$ und m repräsentieren den Impuls bzw. die Masse der Nukleonen am Ort $\vec{r}$ und bei $V(\rho(\vec{r}))$ handelt es sich um die potentielle Energiedichte entsprechend den Gleichungen (3.22) und (3.24). Für unendliche Kernmaterie entspricht die Phasenraumdichte einer Θ-Funktion

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{4}{(2\pi)^3}\, \Theta(\mid \vec{p} \mid - k_F) \tag{3.49}$$

mit dem Fermiimpuls

$$k_F = \left(\frac{3}{2}\pi^2 \rho(\vec{r})\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3.50}$$

EOS	K (MeV)	a (MeV)	b (MeV)	c (MeV)	τ	$\Lambda(1/fm)$
SMD	215	-108.6	136.8	-63.6	1.26	2.13
S	215	-287.0	233.7	/	1.23	/
MMD	290	-29.3	57.2	-63.5	1.76	2.13
HMD	380	-10.0	38.0	-63.5	1.76	2.13
H	380	-124.3	71.0	/	2.0	/

Tabelle 3.1: Verwendete Parametersätze und Kompressibilitäten für die Einteilchen-Potentiale (3.23) und (3.25).

Aus der Energiedichte (3.48) erhält man die Zustandsgleichung für Kernmaterie (EOS), die die Bindungsenergie pro Nukleon (E_b/A) als Funktion der Baryonendichte angibt,

$$\frac{E_b}{A}(\rho) = \frac{H(\vec{r})}{\rho} - m. \tag{3.51}$$

Am Saturationspunkt hat die Bindungsenergie pro Nukleon einen Wert von -16 MeV. Die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{E_b}{A}(\rho)\right)_{\rho=\rho_0} = 0 \tag{3.52}$$

stellt sicher, daß die Bindungsenergie bei der Saturationsdichte ρ_0 ein Minimum annimmt. Die (In-)Kompressibilität K bestimmt das funktionale Verhalten der EOS. Sie ist über die zweite Ableitung der Bindungsenergie pro Nukleon am Saturationspunkt als

$$K \equiv 9\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{E_b}{A}(\rho)\right)_{\rho=\rho_0} \tag{3.53}$$

definiert. Da K experimentell nur in einem Bereich von $180-400$ MeV eingegrenzt ist, werden mehrere EOS mit unterschiedlichen Kompressibilitäten gefittet und die Sensitivität der berechneten Observablen auf K untersucht. Mit den Gleichungen (3.51), (3.52) und (3.53) werden die Parameter A, B und τ der Parametrisierungen des lokalen Einteilchen-Potentials (3.23) festgelegt. Die Ergebnisse befinden sich in der Tabelle (3.1) und sind mit H und S gekennzeichnet. In Abbildung 3.1 sind die resultierenden Zustandsgleichungen für Kernmaterie dargestellt. Die durchgezogene Linie stellt eine EOS mit einer Kompressibilität von 215 MeV dar und die gestrichelte Linie entspricht einer EOS mit $K = 380$ MeV. Das Verhalten der Mittleren-Feld-Potentiale als Funktion der Dichte ist in Abbildung 3.2 wiederum für $K = 215$ und $K = 380$ dargestellt.

Die Parametrisierung (3.25) enthält noch zusätzlich die Parameter C und Λ zur Anpassung der Impulsabhängigkeit des Einteilchen-Potentials. Dies geschieht bei $\rho = \rho_0$ an drei Punkten [59]:

$$\begin{aligned} U(p=0) &= -75MeV \\ U(p=800MeV) &= 0MeV \\ U(p=\infty) &= 30.5MeV \end{aligned} \tag{3.54}$$

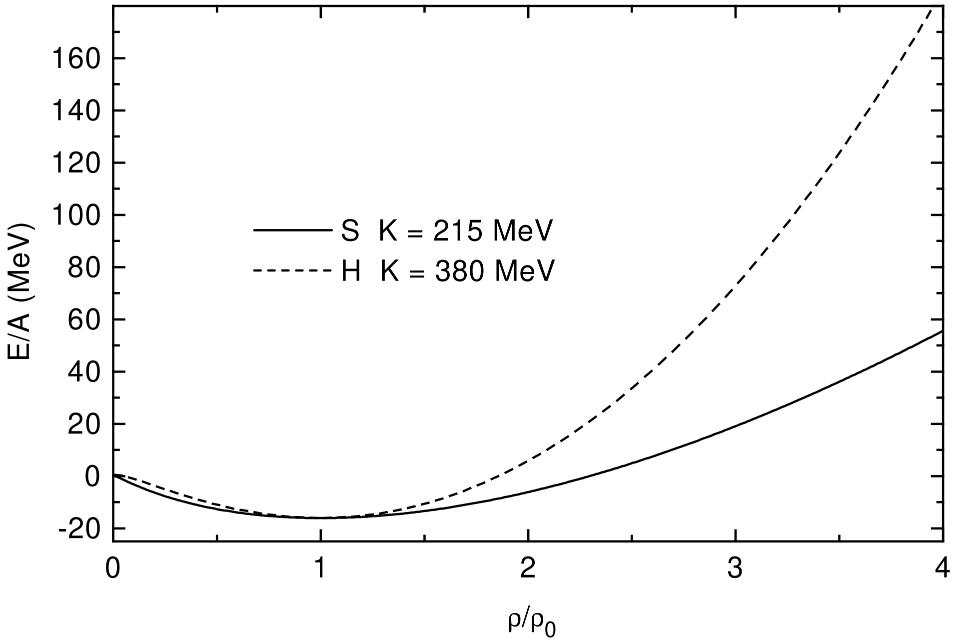

Abbildung 3.1: Zustandsgleichungen für Kernmaterie für die Parametersätze H und S (s. Tabelle (3.1)).

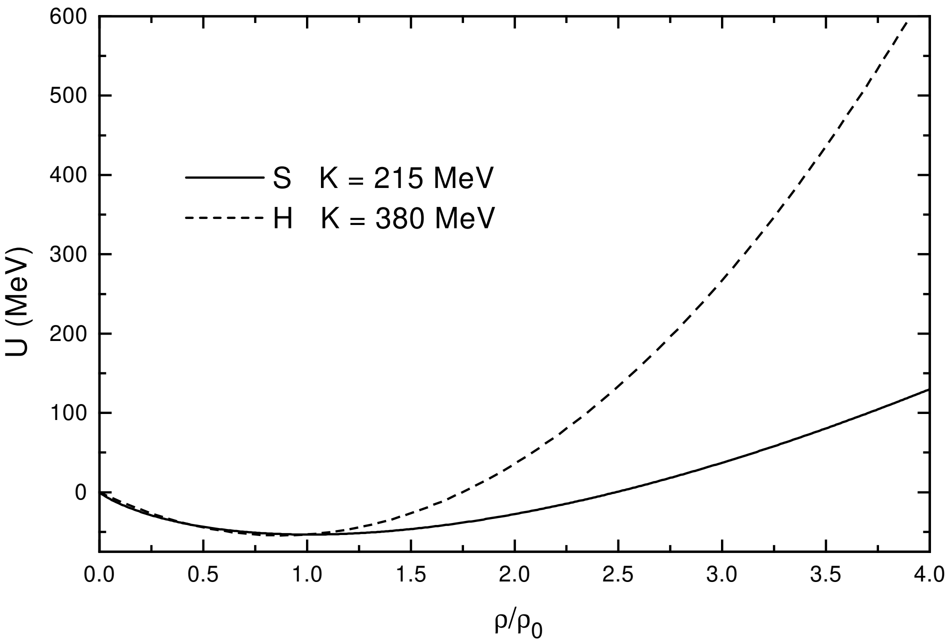

Abbildung 3.2: Resultierende Mittlere-Feld-Potentiale für die Parametersätze H und S (s. Tabelle (3.1)).

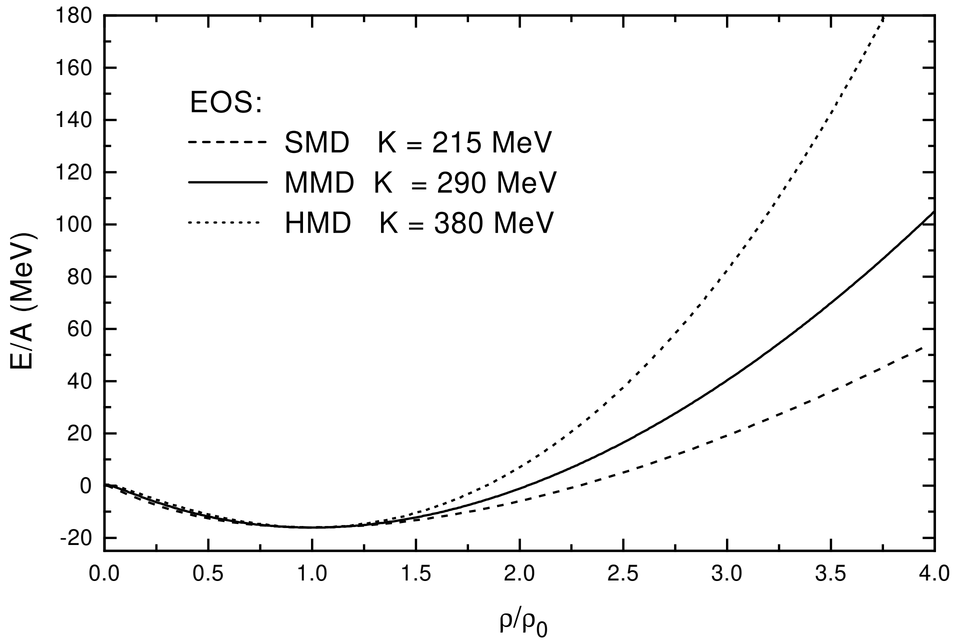

Abbildung 3.3: Zustandsgleichungen für Kernmaterie für die Parametersätze SMD, MMD und HMD (s. Tabelle (3.1)).

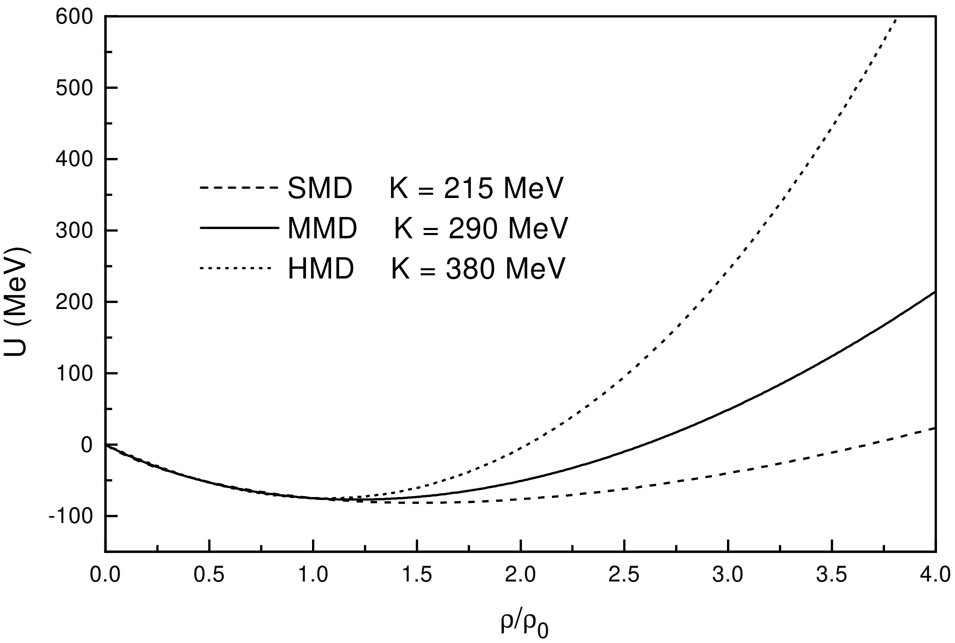

Abbildung 3.4: Resultierende Mittlere-Feld-Potentiale für die Parametersätze SMD, MMD und HMD (s. Tabelle (3.1)) für Nukleonen mit Ipuls $\vec{p} = \vec{0}$.

In Gleichung (3.54) bezeichnet p den Betrag des Impulses $\vec{p}$, mit dem sich das Nukleon relativ zur es umgebenden Kernmaterie bewegt. Die resultierenden Parametersätze SMD, MMD und HMD sind mit den zugehörigen Kompressibilitäten in Tabelle (3.1) angegeben. Die entsprechenden Zustandsgleichungen für Kernmaterie für $K = 215$, 290 und 380 MeV sind in Abbildung 3.3 dargestellt. In Abbildung 3.4 sind die Einteilchen-Potentiale für die Parametersätze SMD, MMD und HMD für $p = 0$ als Funktion der Dichte dargestellt. Hier erkennt man genau wie in Abbildung 3.2, daß man mit steigender Kompressibilität bei hohen Dichten zunehmend repulsivere Mittlere-Feld-Potentiale erhält. Der Vergleich der Abbildungen 3.1 bis 3.4 zeigt, daß die Dichteabhängigkeit der Skyrme-Parametrisierungen und die Parametrisierungen der explizit impulsabhänigen Einteilchen-Potentiale und EOS vergleichbar ist.
Die Impulsabhängigkeit des Einteilchen-Potentials ist in Abbildung 3.5 für den Parametersatz MMD für Dichten von $0.5\rho_0$, ρ_0, $2\rho_0$ und $3\rho_0$ dargestellt.
Aufbauend auf den in diesem Abschnitt vorgestellten Parametrisierungen der Einteilchen-Potentiale werden die im CBUU-Modell verwendeten Selbstenergien der Baryonen extrahiert.

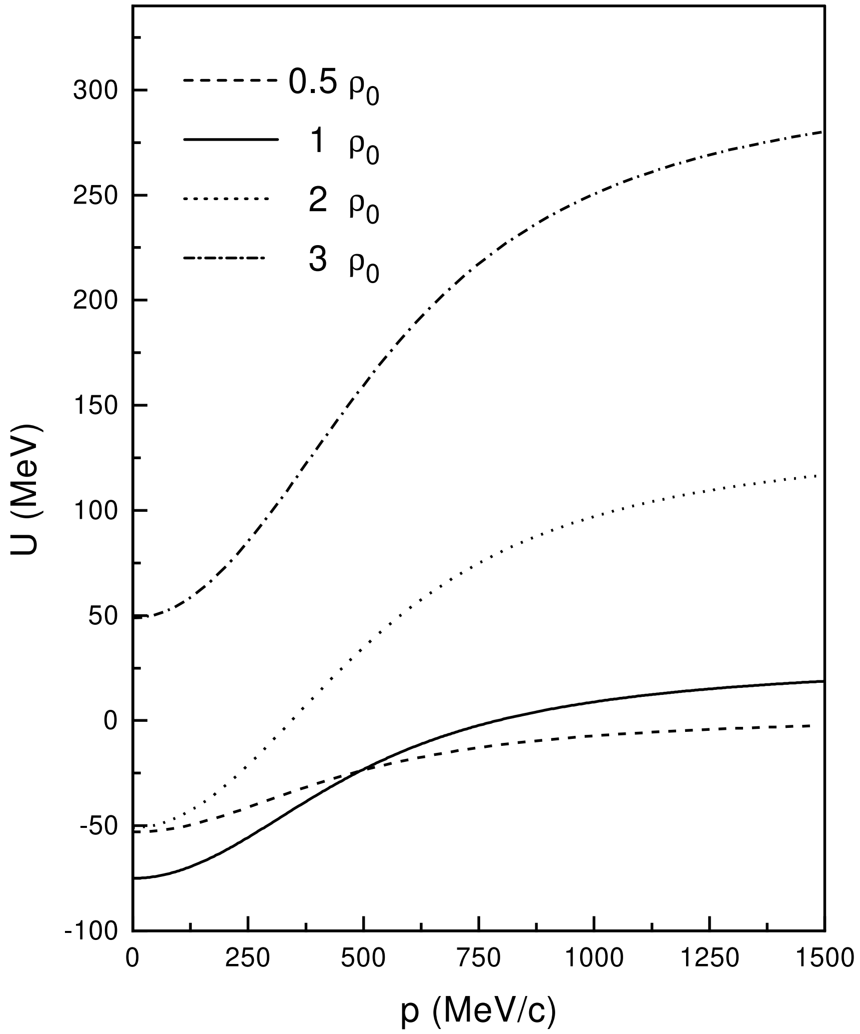

Abbildung 3.5: Impulsabhängigkeit des Mittleren-Feld-Potentials für den Parametersatz MMD für Dichten von $0.5\rho_0$ (gestrichelt), ρ_0 (durchgezogen), $2\rho_0$ (gepunktet) und $3\rho_0$ (strichpunktiert).

Kapitel 4

Wirkungsquerschnitte

In diesem Kapitel werden die zur Lösung der Kollisionsintegrale 2.20 verwendeten Wirkungsquerschnitte der elementaren Reaktionen (s. Abschnitt 2.3.1) vorgestellt.
Die Produktion von Mesonen in Meson-Nukleon- oder Nukleon-Nukleon-Kollisionen im Rahmen eines Resonanzmodells beschrieben. Die Grundlagen dieses Modells werden in Abschnitt 4.1 dargelegt. Anschließend werden ausgehend von einem lorentzinvarianten Ausdruck für den Wirkungsqeurschnitt die Wirkungsquerschnitte für Meson-Nukleon-Kollisionen bestimmt und mit experimentellen Daten für π-Nukleon- und η-Nukleon-Streuung vergleichen. Die Parametrisierungen der Wirkungsquerschnitte für die Produktion baryonischer Resonanzen R in Nukleon-Nukleon-Kollisionen werden durch Anpassung der entsprechenden invarianten Matrixelemente an experimentelle Daten zur 1π-, ρ-, η- und 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Reaktionen erhalten. Aus diesen Wirkungsquerschnitten können dann die $NR \to NN$-Wirkungsquerschnitte unter Ausnutzung der Zeitumkehrinvarianz bestimmt werden. Es zeigt sich, daß zur Beschreibung der 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Stößen direkt oberhalb der Schwelle das Resonanzmodell nicht ausreicht. Daher wird zusätzlich zur Beschreibung der Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen im Rahmen des Resonanzmodells noch die direkte Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Reaktionen ($NN \to NN\pi$) in das CBUU-Modell aufgenommen. Zur Beschreibung der elastischen Nukleon-Nukleon- bzw. Nukleon-Resonanz-Kollisionen werden Parametrisierungen der freien elastischen Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnittes verwendet.

4.1 Das Resonanzmodell

Neben elastischen Nukleon-Nukleon-Kollisionen werden im CBUU-Modell inelastische Reaktionskanäle behandelt, so z. B. die π- oder η-Produktion in Nukleon-Nukleon-Stößen bzw. in Meson-Baryon-Kollisionen. Die Beschreibung dieser inelastischen Reaktionen erfolgt in einem Resonanzmodell, das im folgenden beschrieben wird.
Zur quantenmechanischen Berechnung der Wirkungsquerschnitte für Mesonproduktion in Meson-Nukleon- und in Nukleon-Nukleon-Kollisionen werden in niedrigster Ordnung die in Abbildung 4.1 dargestellten Feynman-Diagramme ausgewertet. Die linke Seite der Abbildung beschreibt die Mesonproduktion in einer Meson-Nukleon-Kollision. Ein Meson a kollidiert mit einem Nukleon b und bilden einen intermediären Zustand, der durch eine Resonanz R beschrieben wird. Diese Resonanz wiederum zerfällt in ein

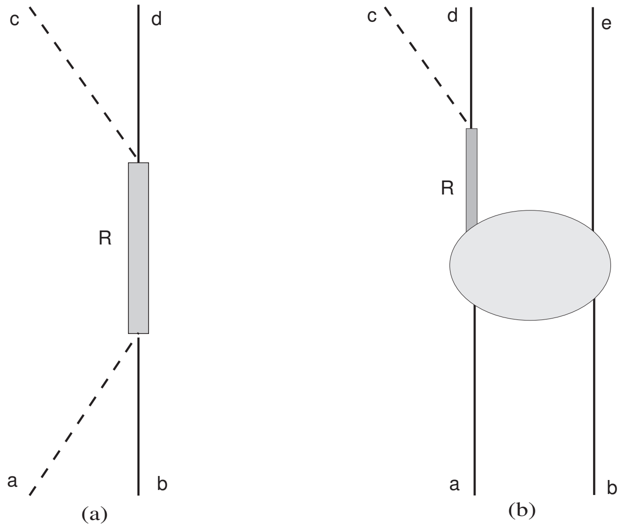

Abbildung 4.1: Feynman-Diagramme niedrigster Ordnung für (a) Meson-Nukleon und (b) Nukleon-Nukleon-Kollisionen.

Meson c und ein Nukleon d. Analog erfolgt die Mesonproduktion in Nukleon-Nukleon-Stößen (rechte Seite der Abbildung 4.1).
Zur Auswertung des Feynman-Diagramms geht man hier von einer effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung aus, die in der Abbildung durch eine Ellipse angedeutet wird. Bei der intermediären Resonanz R handelt es sich im allgemeinen um ein 'off-shell'-Teilchen, d.h. Energie und Impuls der Teilchen sind nicht über eine Dispersionsrelation der Form

$$E_R^2 = \vec{p_R}^2 + m_r^2 \tag{4.1}$$

miteinander verknüpft. In einer semiklassischen Transporttheorie wie dem CBUU-Modell ist die Behandlung von 'off-shell'-Teilchen nicht möglich. Alle Teilchen befinden sich hier 'on-shell', d. h. sie genügen einer Dispersionsrelation (4.1).
Zur Behandlung der oben angesprochenen Prozesse werden diese, wie in Abbildung 4.2 dargestellt, als Zweistufenprozesse aufgefaßt. Im Fall der Mesonproduktion (links) in Meson-Nukleon-Kollisionen wird in einem Meson-Nukleon-Stoß eine 'on-shell'-Resonanz erzeugt, die entsprechend eines statistischen Zerfallsgesetzes (s. Abschnitt 5.6.2) dann in einem zweiten Schritt in ein Meson und ein Nukleon zerfällt. In Nukleon-Nukleon-Kollisionen (rechts) wird eine Resonanz und ein Nukleon erzeugt. Die erzeugte Resonanz wird entsprechend ihrer Dispersionsrelation propagiert, bis sie in ein Nukleon und ein Meson zerfällt. Um dem 'off-shell'-Verhalten der Resonanzen Rechnung zu tragen, werden die Massen der Resonanzen entsprechend einer Lorentz-Verteilung (s. Abschnitt 4.3.1, 4.4) gewählt. Prozesse, die mesonische Resonanzen enthalten (s.u.), werden analog behandelt.

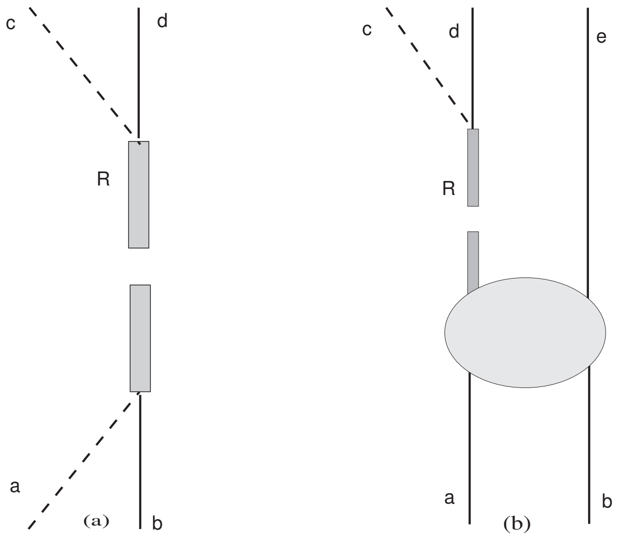

Abbildung 4.2: Meson-Nukleon (a) und Nukleon-Nukleon-Kollisionen (b) als Stufenprozesse im Resonanzmodell.

4.2 Eigenschaften und Zerfallsbreiten der Resonanzen

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt erläutert wurde, wie die inelastische Reaktionen im Rahmen des Resonanzmodells behandelt werden, werden nun die Eigenschaften und Zerfallsbreiten der im CBUU-Modell implementierten Resonanzen erläutert.
Die Besetzung der Resonanzmassen M erfolgt entsprechend der Lorentz-Verteilung

$$f(M) = \frac{M^2\Gamma^2_{tot}(M)}{(M^2 - M_R^2)^2 + M^2\Gamma^2_{tot}(M)}, \tag{4.2}$$

deren Parameter die mittlere Resonanzmasse M_R, die totale Zerfallsbreite Γ_R für $M = M_R$ und die partiellen Zerfallswahrscheinlichkeiten sind. Für das ρ-Meson z. B. wird eine mittlere Masse M_R von 770 MeV/c^2 und eine Zerfallsbreite Γ_R von 150 MeV verwendet. Das ρ-Meson zerfällt zu 100% in zwei Pionen. Ebenso das σ-Meson, das eine Resonanzmasse M_R von 800 MeV/c^2 und eine Zerfallsbreite Γ_R von 800 MeV besitzt. Die verwendeten Parameter der baryonischen Resonanzen sind in Tabelle 4.1 angegeben. Es soll angemerkt werden, daß alle aufgeführten Massen M_R, Zerfallsbreiten Γ_R und Zerfallswahrscheinlichkeiten aus dem PDB [49] entnommen sind.

4.2.1 Parametrisierungen der Zerfallsbreiten

Die angegebenen Werte für die Zerfallsbreiten Γ_R der mesonischen und baryonischen Resonanzen gelten nur für Resonanzen der Masse M_R. Im allgemeinen sind die Zerfallsbreiten der Resonanzen Funktionen der jeweiligen Masse M. Für diese masseabhängigen Zerfallsbreiten $\Gamma(M)$ werden Parametrisierungen verwendet, die den den jeweiligen Zerfallsprodukten zur Verfügung stehenden Phasenraum berücksichtigen. Durch Normierung wird sichergestellt, daß für $M = M_R$ die oben angegebenen Zerfallsbreiten

Resonanz	$\overline{\lvert\mathcal{M}^2\rvert}/16\pi$ $[mb\,GeV^2]$	Γ_R $[MeV]$	Zerfallswahrscheinlichkeit [%]					
			N π	N η	N $\pi\pi$			
					$\Delta\pi$	N ρ	N $(\pi\pi)^{I=0}_{direkt}$	$N(1440)\pi$
$\Delta(1232)$	-	120	100	0	0	0	0	0
$N(1440)$	14	350	65	0	25	0	10	0
$N(1520)$	4	120	55	0	25	15	5	0
$N(1535)$	8, 40	203	50	45	0	2	0	3
$\Delta(1600)$	68	350	15	0	75	0	0	10
$\Delta(1620)$	68	150	30	0	60	10	0	0
$N(1650)$	4	150	80	0	7	5	4	4
$N(1675)$	68	150	45	0	55	0	0	0
$N(1680)$	4	130	70	0	10	5	15	0
$\Delta(1700)$	7	300	15	0	55	30	0	0
$N(1720)$	4	150	20	0	0	80	0	0
$\Delta(1905)$	7	350	15	0	25	60	0	0
$\Delta(1910)$	68	250	50	0	50	0	0	0
$\Delta(1950)$	14	300	75	0	25	0	0	0

Tabelle 4.1: Mittlere Massen M_R, Zerfallsbreiten Γ_R, Zerfallskanäle und Zerfallswahrscheinlichkeiten der baryonischen Resonanzen. Die angegebenen Werte sind aus [49] und im Fall des $N(1535)$ aus [65] entnommen (Bemerkung: Die im CBUU-Modell verwendete Masse der $N(1535)$-Resonanz entspricht dem in [65] angegebenen Wert von 1544 MeV/c^2.) Die zweite Spalte enthält die gemittelten Matrixelemente für die Produktion baryonischer Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen (s. Abschnitt 4.4).

Γ_R resultieren. Aufgrund der verschiedenen Endzustände werden die Partialbreiten der einzelnen Zerfallskanäle separat parametrisiert. Die totale Zerfallsbreite $\Gamma(M)$ einer Resonanz der Masse M ergibt sich aus der Summe über alle Partialbreiten $\Gamma_i(M)$, wobei i die Zerfallskanäle einer Resonanz bezeichnet.

- **1π-Zerfallsbreite des** $\Delta(1232)$
  Für die $\Delta(1232)$-Zerfallsbreite wird die impulsabhängige Parametrisierung von Moniz und Koch [66]

$$\Gamma_{Moniz}(q) = \Gamma_R \frac{M_\Delta}{M} \left(\frac{q}{q_r}\right)^3 \left(\frac{q_r^2+\delta^2}{q^2+\delta^2}\right)^2 \tag{4.3}$$

  verwendet. M bezeichnet die aktuelle Masse des $\Delta(1232)$, $M_\Delta = 1232$ MeV/c^2 ist seine mittlere Masse entsprechend Tabelle 4.1 und q ist der Betrag des Dreierimpulses des Pions im Ruhesystem des $\Delta(1232)$ der Masse M. Analog ist q_r der Betrag des Dreierimpulses des Pions im Ruhesystem eines $\Delta(1232)$ der Masse M_Δ. Die Zerfallsbreite ist proportional zu q^3, da beim $\Delta(1232)$-Zerfall ein p-Wellen-Pion emittiert wird. Um ein Anwachsen der Breite für Pionenimpulse $\to\infty$ zu verhindern, wird eine Cutoff-Funktion (letzter Term in Gleichung (4.3)) eingeführt. Der Parameter δ hat einen Wert von 0.3 GeV/c^2.

- **1π-/η-Zerfallsbreite höherer baryonischer Resonanzen**
  Die Parametrisierung der 1π- bzw. η-Zerfallsbreite höherer baryonischer Resonanzen ist durch
  $$\Gamma(q) = \Gamma_R \left(\frac{q}{q_r}\right)^{2l+1} \left(\frac{q_r^2+\delta^2}{q^2+\delta^2}\right)^{l+1}, \tag{4.4}$$
  gegeben. Dabei ist l der Bahndrehimpuls des emittierten π oder η; q und q_r sind analog zu Gleichung (4.3) die Impulse des emittierten Mesons im Ruhesystem der Resonanz der Masse M bzw. M_R. Die Cutoff-Funktion hat dieselbe Form wie in (4.3). Der Parameter δ hängt weiterhin von der mittleren Masse M_R und der totalen Zerfallsbreite Γ_R der jeweiligen Resonanz ab
  $$\delta^2 = (M_R - M_N - m_\pi)^2 + \frac{\Gamma_R^2}{4}. \tag{4.5}$$

- **2π-Zerfallsbreite baryonischer Resonanzen**
  Der 2π-Zerfall höherer baryonischer Resonanzen wird durch einen Zweistufenprozeß beschrieben. Zuerst zerfällt die Resonanz entsprechend ihrer Partialbreiten in ein $\Delta(1232)$ oder ein $N(1440)$ und ein Pion oder in ein Nukleon und eine mesonische Resonanz (ρ oder σ). Diese im ersten Schritt erzeugten Resonanzen propagieren durch das nukleare Medium und zerfallen schließlich in ein Nukleon und ein Pion im Fall des $\Delta(1232)$ und $N(1440)$ oder in zwei Pionen im Fall des ρ- und σ-Mesons
  $$R \rightarrow r\,b \rightarrow N\,\pi\,\pi. \tag{4.6}$$
  R steht hier für die zerfallende höhere baryonische Resonanz, r repräsentiert ein $\Delta(1232)$, ein $N(1440)$, ein ρ oder ein σ, und b ist ein Nukleon bzw. ein Pion. Da die erste Reaktion des Zweistufenprozesses (4.6) eine Resonanz r enthält, muß über deren Massenverteilung integriert werden, um die 2π-Zerfallsbreite der Resonanz R zu ermitteln,
  $$\begin{aligned}\Gamma_{R\rightarrow r\,b}(M) &= \frac{P_{2\pi}}{M}\int_0^{M-m_b} d\mu\, p_f\, \frac{2}{\pi}\frac{\mu^2\,\Gamma_{r,tot}(\mu)}{(\mu^2-m_r^2)^2+\mu^2\,\Gamma_{r,tot}^2(\mu)} \\ &\quad \times \left(\frac{(M_R-M_N-2m_\pi)^2+\delta^2}{(M-M_N-2m_\pi)^2+\delta^2}\right)^2.\end{aligned} \tag{4.7}$$
  $P_{2\pi}$ ist die 2π-Zerfallsbreite für den Zerfall $R \rightarrow rb$ der Resonanz R aus Tabelle 4.1 und p_f ist der Impuls der Zerfallsprodukte r und b im Ruhesystem von R. Da das Integral in Gleichung (4.7) für große Resonanzmassen M proportional zu M ist, wird auch hier eine Cutoff-Funktion eingeführt, um ein Divergieren der 2π-Breite $\Gamma_{R\rightarrow rb}(M)$ für große M zu vermeiden. Für den Parameter δ wird wieder ein Wert von 0.3 GeV verwendet.

- **Zerfallsbreiten der mesonischen Resonanzen**
  Für die Zerfallsbreiten der mesonischen Resonanzen ρ und σ wird eine Parametrisierung ähnlich der des 1π-Zerfalls des $\Delta(1232)$ gewählt,
  $$\Gamma(M) = \Gamma_r \frac{M_R}{M}\left(\frac{q}{q_r}\right)^{2J_r+1} (\frac{q_r^2+\delta^2}{q^2+\delta^2})^{J_r+1}, \tag{4.8}$$

wobei M_R und M die mittlere Masse bzw. die aktuelle Masse der mesonischen Resonanz sind. q and q_r haben dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (4.3) und J_r ist der Spin der zerfallenden Resonanz. Γ_r ist die Zerfallsbreite der Resonanz mit der Masse M_R (s.o.). Für den Parameter δ der Cutoff-Funktion wird ebenfalls 0.3 GeV gewählt.

4.3 Meson-Baryon- und Meson-Meson-Wirkungsquerschnitte

Neben den schon erwähnten Meson-Nukleon-Kollisionen werden auch, entsprechend den Partialbreiten der Resonanzen, Reaktionen von Mesonen mit baryonischen Resonanzen und Meson-Meson-Kollisionen im Rahmen des Resonanzmodells (s. Abschnitt 4.1) behandelt. Bevor die erhaltenen Ergebnisse mit experimentellen Daten verglichen werden, wird im nächsten Abschnitt der im Resonanzmodell verwendete Ausdruck zur Bestimmung der Wirkungsquerschnitte abgeleitet.

4.3.1 Der Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt

Zur Beschreibung dieser Reaktionen wird angenommen, daß sowohl im Anfangszustand (a,b) als auch im Endzustand (c,d) der Reaktion zwei Teilchen vorliegen. Reaktionen mit einem 3-Teilchen-Endzustand (z.B. $\pi N \to R \to N\pi\pi$) werden durch zwei sequentielle Zweikörperzerfälle der Resonanz R modelliert (z.B. $NN \to R \to \Delta(1232)\pi \to N\pi\pi$). für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion

$$a + b \to c + d \tag{4.9}$$

erhält man im Schwerpunktsystem der Teilchen a und b [67]

$$d\sigma_{ab\to cd} = \frac{(2\pi)^4}{4p_i\sqrt{s}}\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)\overline{|\mathcal{M}_{ab\to cd}|^2}\frac{d^3p_c}{(2\pi)^3 2E_c}\frac{d^3p_c}{(2\pi)^3 2E_c}. \tag{4.10}$$

Bei $|\mathcal{M}_{ab\to cd}|^2$ handelt es sich um das Quadrat des invarianten Matrixelements der Reaktion. Der Querstrich über dem Quadrat des Matrixelements soll andeuten, daß die Summation über die Spins der auslaufenden Teilchen und die Mittelung über die Spins der Teilchen im Anfangszustand der Reaktion enthalten ist. Bei $\sqrt{s}$ handelt es sich um die invariante Energie der Reaktion und p_i gibt den Impuls der Teilchen a und b im Schwerpunktsystem an. Entsprechend des linken Teils der Abbildung 4.1 setzt sich das invariante Matrixelement $|\mathcal{M}_{ab\to cd}|^2$ aus einem Matrixelement, das die Produktion von R aus a und b beschreibt, aus dem Propagator von R und aus dem Matrixelement, das den Zerfall von R in c und d repräsentiert, zusammen:

$$\mathcal{M}_{ab\to cd} = \mathcal{M}_{ab\to R}\, P_R\, \mathcal{M}_{R\to cd}.$$

Wie weiter oben bereits ausgeführt, wird die Reaktion im Rahmen einer semiklassischen Transporttheorie als Zweistufenprozeß dargestellt. Dies entspricht der Annahme, daß das Quadrat des invarianten Matrixelements faktorisiert,

$$\overline{|\mathcal{M}_{ab\to cd}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{ab\to R}|^2}\,|P_R|^2\,\overline{|\mathcal{M}_{R\to cd}|^2}, \tag{4.11}$$

mit dem Propagator für spinlose Teilchen

$$P_R = \frac{1}{s - M_R^2 + \Pi}. \tag{4.12}$$

Bei Π handelt es sich um den Imaginärteil der Selbstenergie der Resonanz R, die sich aus der totalen Zerfallsbreite von R ergibt,

$$\Pi = i\sqrt{s}\Gamma_{tot}. \tag{4.13}$$

Für den Fall daß a, b, c, d und R spinlose Teilchen sind, entspricht Gleichung (4.11) der 1. Bornschen Näherung für die Reaktion (4.9).
Die Quadrate der Matrixelemente in Gleichung (4.11) können - wiederum unter der Annahme, daß R eine spinlose Resonanz ist - im Ruhesystem von R durch die entsprechenden Partialbreiten ausgedrückt werden [67],

$$\Gamma_{R\to ab} = \frac{p_{ab}}{8\pi s}\overline{|\mathcal{M}_{R\to ab}|^2}, \tag{4.14}$$

wobei p_{ab} den Betrag des Impulses der Teilchen a und b im Ruhesystem der Resonanz ist und s dem Quadrat der Resonanzmasse entspricht.
Unter Berücksichtigung der Spinfaktoren S_i $(i = a, b, R)$ erhält man für den totalen Wirkungsquerschnitt der Reaktion (4.9) den bekannten Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{ab\to R\to cd} = \frac{2S_R + 1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{4\pi}{p_i^2} \frac{s\,\Gamma_{R\to ab}\,\Gamma_{R\to cd}}{(s - M_R^2)^2 + s\,\Gamma_{tot}^2}. \tag{4.15}$$

Dieser Querschnitt enthält keine Isospinfaktoren, da diese im CBUU-Modell explizit betrachtet werden und somit mit in die Partialbreiten der Resonanzen eingehen.

4.3.2 Vergleich mit experimentellen Daten

In diesem Abschnitt werden die aus der Breit-Wigner-Formel erhaltenen Wirkungsquerschnitte mit experimentellen Daten für die totalen π^-p-, π^+p- und $\pi^-p \to \eta n$-Wirkungsquerschnitte verglichen.
In Abbildung 4.3 ist der im Rahmen des Resonanzmodells erhaltene totale π^-p-Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Linie) im Vergleich zu den experimentellen Daten [68] dargestellt. Um diesen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, wird im Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt (4.15) für $\Gamma_{R\to ab}$ die Partialbreite $\Gamma_{R\to\pi^-p}$ der entsprechenden Resonanz R verwendet. Weiterhin wird $\Gamma_{R\to cd}$ durch die totale Zerfallsbreite der Resonanz ersetzt und anschließend werden die Beiträge aller baryonischer Resonanzen (s. Tabelle 4.1) inkohärent aufsummiert. Im Rahmen des verwendeten Resonanzmodells erhält man bis zu Laborimpulsen von etwa 1.1 GeV/c gute Übereinstimmung mit den Daten. Zur Verdeutlichung sind in der Abbildung die Beiträge des $\Delta(1232)$ (gestrichelte Linie), des $N(1440)$ (gepunktete Linie) und des $N(1535)$ (strich-punktierte Linie) zum Wirkungsquerschnitt dargestellt. Man erkennt, daß das $\Delta(1232)$ den Wirkungsquerschnitt für Pionenimpulse bis 0.4 GeV/c dominiert, während sich der Querschnitt für höhere Pionenimpulse aus der Superposition der Beiträge mehrerer Resonanzen ergibt.
In Abbildung 4.4 ist der totale π^+p-Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Linie) im

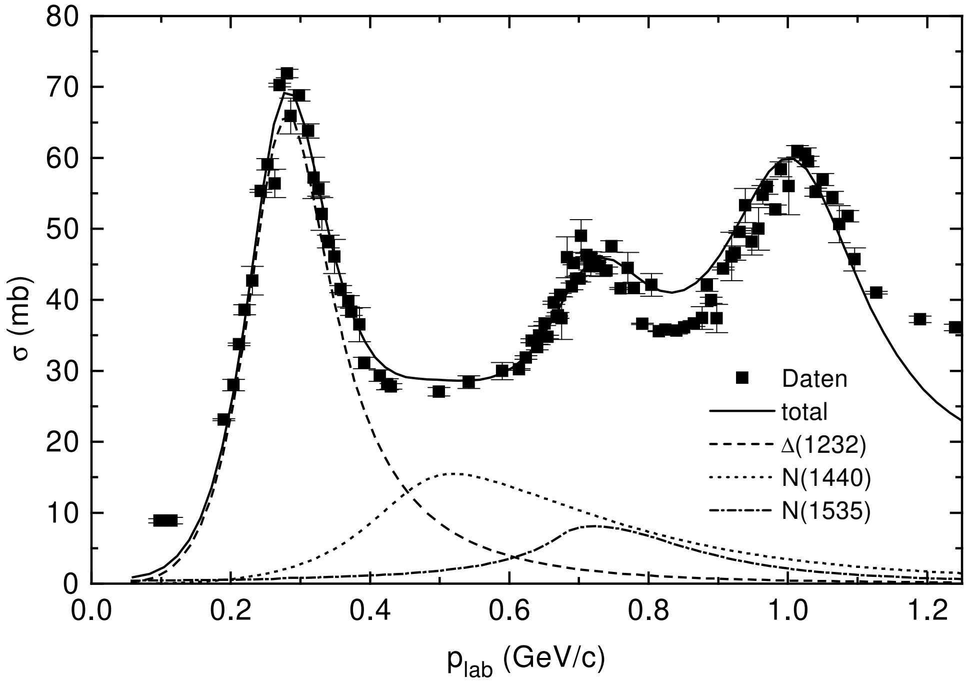

Abbildung 4.3: Der totale Wirkungsquerschnitt der Reaktion π^--p in Breit-Wigner-Näherung als Funktion des π-Laborimpulses (durchgezogene Linie) im Vergleich zu den experimentellen Daten [68]. Die gestrichelte, die gepunktete und die strich-punktierte Linie geben die Beiträge des $\Delta(1232)$, des $N(1440)$ und des $N(1535)$ zum totalen Wirkungsquerschnitt an.

Vergleich zu den experimentellen Daten [68] dargestellt. Die Bestimmung des Wirkungsquerschnittes erfolgt analog. Aufgrund der Ladungserhaltung können zu diesem Kanal zur Isospin 3/2-Resonanzen, also Δ's, beitragen. Die Dominanz des $\Delta(1232)$-Beitrags (gestrichelte Linie) ist hier noch ausgeprägter als im Fall der Reaktion π^-p. Man erkennt auch hier wieder eine gute Übereinstimmung mit den Daten bis hin zu Pionenimpulsen von circa 1.0 GeV/c.
Zum Abschluß wird in Abbildung 4.5 der für die Reaktion $\pi^-p \to \eta n$ erhaltene Wirkungsquerschnitt im Vergleich zu den experimentellen Daten gezeigt. Hier trägt nur das $N(1535)$ bei, da dies die einzige der betrachteten Resonanzen ist, die an das η-Meson koppelt (s. Tabelle 4.1). Die Daten für diese Reaktion werden ebenfalls bis zu Impulsen von ≈ 1.0 GeV/c recht gut beschrieben. Aufgrund der verwendeten partiellen Zerfallswahrscheinlichkeiten der $N(1535)$-Resonanz (s. Tabelle 4.1) werden die Daten im Maximum um circa 10 bis 15% überschätzt. Oberhalb von 1.0 GeV/c werden die Daten unterschätzt, da dieser Bereich durch den verwendeten Modellraum nicht hineichend abgedeckt wird.

4.4 Der $NN \to NR$-Wirkungsquerschnitt

Die Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für die Produktion von höheren baryonischen Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen erfolgt unter der Annahme, daß die

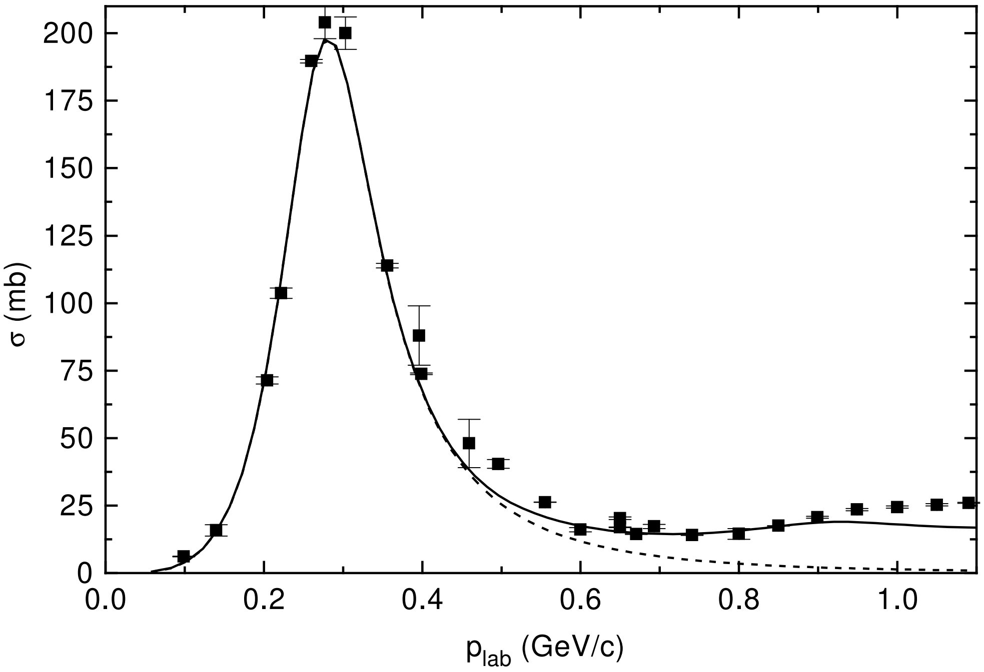

Abbildung 4.4: Der totale Wirkungsquerschnitt der Reaktion π+-p aus Gleichung (4.15) als Funktion des π-Laborimpulses (durchgezogene Linie) im Vergleich zu den experimentellen Daten [68]. Die gestrichelte Linie gibt den Beitrag des $\Delta(1232)$ zum totalen Wirkungsquerschnitt an.

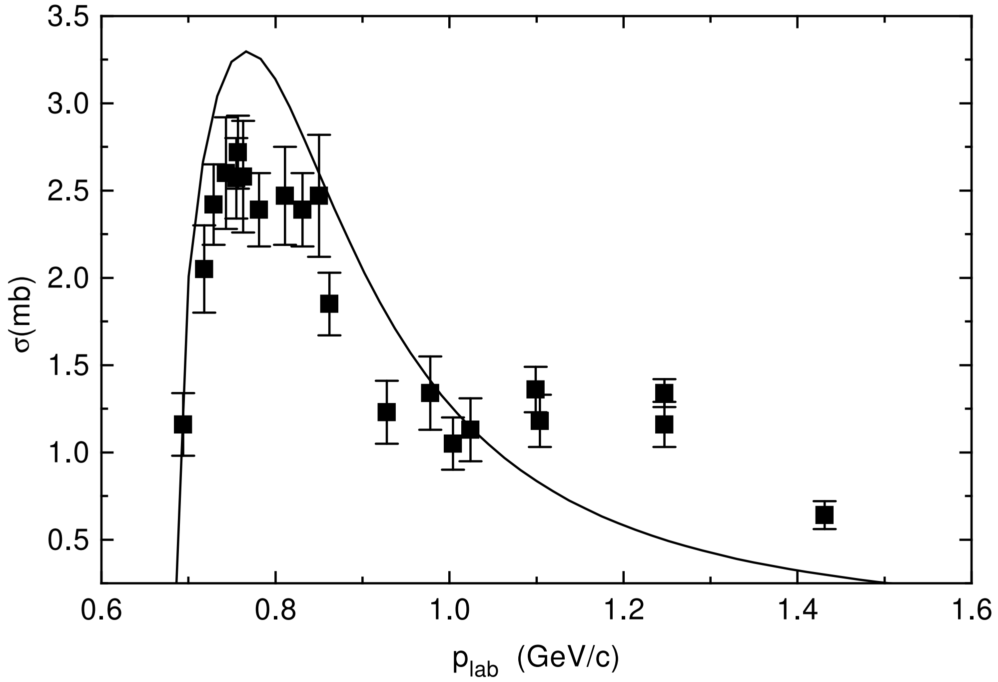

Abbildung 4.5: Der totale Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\pi^- p \to \eta n$ aus Gleichung (4.15) als Funktion des η-Laborimpulses im Vergleich zu den experimentellen Daten [68].

π-, η und ρ-Produktion in Nukleon-Nukleon-Reaktionen oberhalb des $\Delta(1232)$ durch folgende Zweistufenprozesse beschrieben werden können: In der Nukleon-Nukleon-Kollision erfolgt die Anregung einer baryonischen Resonanz. Diese zerfällt anschließend in ein Nukleon und ein π, η oder ρ,

$$NN \rightarrow NR \rightarrow NN\pi/\eta/\rho. \tag{4.16}$$

Weiterhin wird angenommen, daß die 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen entweder durch die Anregung zweier $\Delta(1232)$ und deren anschließendem Zerfall in Nukleonen und Pionen oder durch die Anregung einer höheren baryonischen Resonanz und deren Zerfall in ein Nukleon und zwei Pionen (s. Abschnitt 4.2.1) beschrieben werden kann.
Ausgehend von diesen Annahmen wird zunächst im Rahmen des Resonanzmodells ein allgemeiner Ausdruck für die Wirkungsquerschnitte der 1π, η-, ρ- und 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Stößen abgeleitet. Dieser Ausdruck enthält Matrixelemente für die Produktion der höheren baryonischen Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen. Diese werden als konstant angenommen und an die entsprechenden experimentellen Daten für π-, η- und ρ-Produktion angepaßt.

4.4.1 Der allgemeine Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt

Ausgangspunkt der Ableitung des allgemeinen Ausdrucks für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion $NN \rightarrow NR$ ist, wie bereits in Abschnitt 4.1 im Zusammenhang mit der Diskussion von Abbildung 4.2 angedeutet, daß in einer Kollision von zwei Nukleonen $a + b \rightarrow R + e$ eine baryonische Resonanz R und ein Nukleon e erzeugt werden. Die Resonanz R wiederum zerfällt anschließend in zwei Teilchen d und e. Das invariante Matrixelement dieser Reaktion

$$\mathcal{M}_{ab\rightarrow cde} = \mathcal{M}_{ab\rightarrow Re}\, P_R\, \mathcal{M}_{R\rightarrow cd} \tag{4.17}$$

setzt sich, analog zu Abschnitt 4.3.1, aus dem invarianten Matrixelement $\mathcal{M}_{ab\rightarrow Re}$ für die Reaktion $a + b \rightarrow R + c$, dem Propagator P_R (s. Abschnitt 4.3.1) der baryonischen Resonanz und dem invarianten Matrixelement $\mathcal{M}_{R\rightarrow cd}$ des Resonanzzerfalls $R \rightarrow c + d$ zusammen. Im folgenden wird ausgehend von dem Ausdruck,

$$\begin{aligned} d\sigma_{ab\rightarrow cde} &= \frac{(2\pi)^4}{4\,p_i\,\sqrt{s}}\,\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d - p_e)\overline{|\mathcal{M}_{ab\rightarrow cde}|^2} \\ &\quad\times \frac{d^3p_c}{(2\pi)^3\,2E_c}\frac{d^3p_d}{(2\pi)^3\,2E_d}\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3\,2E_e}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

der Wirkungsquerschnitt für die Anregung der baryonischen Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Stößen abgeleitet. Die Vorgehensweise und die verwendeten Näherungen sind analog zur Ableitung des Breit-Wigner-Querschnittes in Abschnitt 4.3.1. In Gleichung (4.18) ist $\sqrt{s}$ die invariante Energie der Teilchen a und b im Anfangszustand der Reaktion und p_i ist ihr Impuls im Schwerpunktsystem der Reaktion. Wie in Abschnitt 4.3.1 ist $\overline{|\mathcal{M}_{ab\rightarrow cde}|^2}$ das Quadrat des invarianten Matrixelementes summiert über die Spins der Teilchen im Endzustand und gemittelt über die Spins der Teilchen a und b.

Die Annahme, daß die Reaktion in einem Zweistufenprozeß abläuft, entspricht wieder einer Faktorisierung des Quadrates des invarianten Matrixelementes gemäß

$$\overline{|\mathcal{M}_{ab\rightarrow cde}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{ab\rightarrow Re}|^2}\,|P_R|^2\,\overline{|\mathcal{M}_{R\rightarrow cd}|^2}. \tag{4.19}$$

Einsetzen von Gleichung (4.19) in (4.18) und anschließende Integration über die Impulse der Teilchen im Endzustand der Reaktion (d^3p_c, d^3p_d und d^3p_e) liefert den Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
\sigma_{ab\rightarrow cde} = & \\
& \int \underbrace{\int \frac{(2\pi)^4}{4\,p_i\,\sqrt{s}}\,\delta^4(p_a + p_b - p_R - p_e)\overline{|\mathcal{M}_{ab\rightarrow Re}|^2}\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3\,2E_e}\frac{d^3p_R}{(2\pi)^3\,2E_R}}_{=\sigma_{ab\rightarrow Re}(\mu)} \\
& \times \underbrace{\int \overline{|\mathcal{M}_{R\rightarrow cd}|^2}\delta^4(p_R - p_c - p_e)\frac{d^3p_c}{(2\pi)^3 2\,E_c}\frac{d^3p_d}{(2\pi)^3 2\,E_d}}_{=\frac{2\mu}{(2\pi)^4}\Gamma_{R\rightarrow cd}} \\
& \times \frac{1}{(\mu^2 - M_R^2)^2 + \mu^2\,\Gamma_{tot}^2}\,(2\pi)^3\,2\,\underbrace{E_R\,dE_R}_{=\mu\,d\mu} \\
& \Rightarrow \frac{d\sigma_{ab\rightarrow Re\rightarrow cde}}{d\mu} = \sigma_{ab\rightarrow Re}(\mu)\,\frac{2}{\pi}\,\frac{\mu^2\,\Gamma_{R\rightarrow cd}}{(\mu^2 - M_R^2)^2 + \mu^2\,\Gamma_{tot}^2}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Hier bezeichnet $\sigma_{ab\rightarrow Re}(\mu)$ den Wirkungsquerschnitt für die Produktion einer Resonanz R der Masse μ in einem Nukleon-Nukleon Stoß,

$$\sigma_{ab\rightarrow Re}(\mu) = \frac{1}{64\,\pi^2\,s\,p_i}\int d\Omega\,p_f\,\overline{|\mathcal{M}_{ab->Re}(\mu)|^2}, \tag{4.21}$$

wobei p_f und p_i die Impulse der Teilchen im Anfangs- und Endzustand der Reaktion $a + b \rightarrow R + e$ in deren Schwerpunktsystem bezeichnen. s ist das Quadrat der invarianten Energie dieses Prozesses.

Wie weiter oben bereits angesprochen wird, im Rahmen des verwendeten Resonanzmodells weiter angenommen, daß die Matrixelemente $\overline{|\mathcal{M}_{ab->Re}(\mu)|^2}$ für alle baryonischen Resonanzen außer dem $\Delta(1232)$ (vergleiche Abschnitt 4.4.2) energie- und impulsunabhängig sind. Das Integral über $d\Omega$ reduziert sich somit auf eine Multiplikation mit 4π.

4.4.2 Der $NN \rightarrow N\Delta(1232)$-Wirkungsquerschnitt

Zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes der Reaktion $NN \rightarrow N\Delta(1232)$ wird das von Dimitriev und Sushkov entwickelte Mesonaustauschmodell [51] verwendet. Im Rahmen dieses Modells wird der Wirkungsquerschnitt für die $\Delta(1232)$-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen in erster Ordnung Störungstheorie unter Verwendung der in Abbildung 4.6 dargestellten Diagramme berechnet. Das Modell von Dimitriev und Sushkov baut auf den folgenden phänomenologischen Lagrangedichten auf,

$$\mathcal{L}_{NN\pi} = \frac{f_{NN\pi}}{m_\pi}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\tilde{\tau}\Psi\partial_\mu\tilde{\pi} \tag{4.22}$$

$$\mathcal{L}_{N\Delta\pi} = \frac{f_{N\Delta\pi}}{m_\pi}\left(\bar{\Psi}_\Delta^\mu\tilde{T}\Psi\partial_\mu\tilde{\pi} + h.c.\right), \tag{4.23}$$

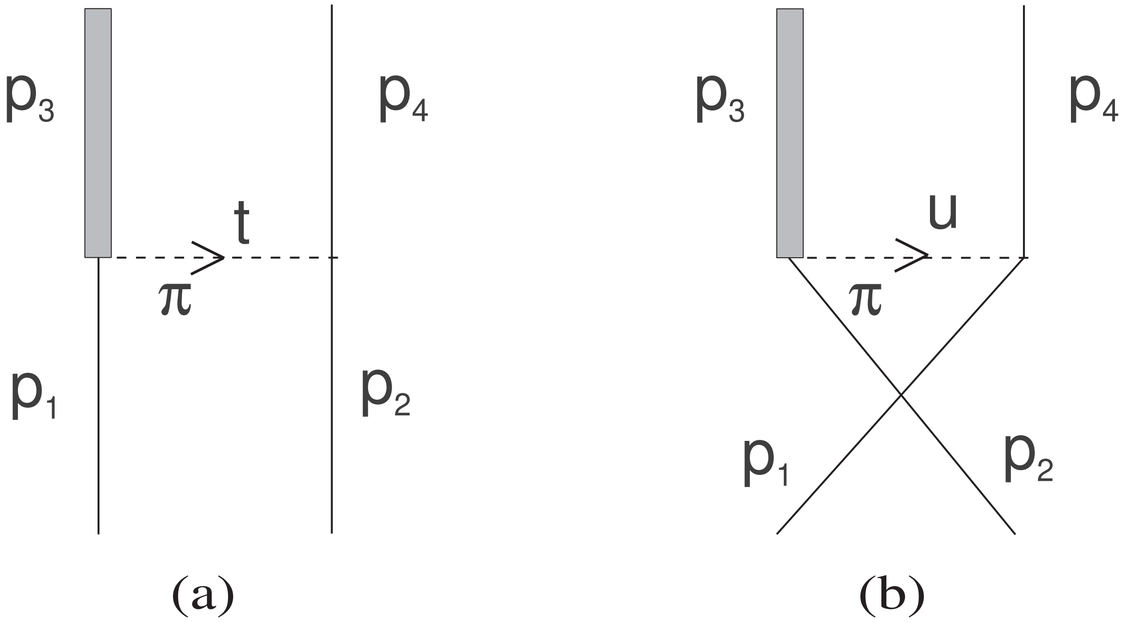

Abbildung 4.6: Feynman-Diagramme 1.Ordnung, die zur Berechnung des $NN \to N\Delta(1232)$-Wirkungsquerschnitts im Rahmen des Mesonaustauschmodells [51]von Dimitriev und Sushkov herangezogen werden.

wobei $\mathcal{L}_{NN\pi}$ und $\mathcal{L}_{N\Delta\pi}$ die $NN\pi$- bzw. die $N\Delta\pi$-Kopplung beschreiben. Bei $\Psi(x)$ handelt es sich um Nukleonspinoren, $\Psi^{\mu}_{\Delta}(x)$ ist der Rarita-Schwinger-Spinor des Deltas, und das Isovektorfeld $\pi(x)$ beschreibt die Pionen. Um das 'off-shell'-Verhalten der Pionen zu berücksichtigen, werden die $NN\pi$- und die $N\Delta\pi$-Vertizes mit einem Formfaktor

$$F(t) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 - t} \tag{4.24}$$

versehen, wobei $t = p_\pi^{\mu\,2}$ der quadrierte Viererimpuls des Pions ist. Der Parameter Λ hat für alle Vertizes denselben Wert, der sich aus der Anpassung an die experimentellen Daten ergibt. Um die Massenverteilung der $\Delta(1232)$-Resonanz zu berücksichtigen, wird an den $N\Delta\pi$-Vertizes ein weiterer, von der invarianten $\Delta(1232)$-Masse μ abhängiger Formfaktor $Z(\mu, m_\pi)$, eingeführt. Dieser Formfaktor muß im Vergleich zur Arbeit von Dimitriev und Sushkov modifiziert werden, da die im CBUU-Modell verwendete Parametrisierung der $\Delta(1232)$-Breite von der in [51] verwendeten Parametrisierung abweicht (eine genauere Diskussion befindet sich in [69]),

$$Z(\mu^2, q^2) = \left(\frac{q^2(M_\Delta^2, m_\pi) + c^2}{q^2(\mu^2, m_\pi) + c^2} \right)^2 . \tag{4.25}$$

Analog zur Definition der $\Delta(1232)$-Breite (4.3) gibt q^2 hier das Quadrat des Dreierimpulses eines von einem $\Delta(1232)$ der Masse $M_\Delta = 1232\ MeV/c^2$ bzw. der Masse μ emittierten Pions im Ruhesystem des zerfallenden $\Delta(1232)$ an. Dimitriev und Sushkov verwenden folgenden Produktansatz für den Formfaktor der $N\Delta\pi$-Vertizes

$$F(t, \mu^2) = F(t)\sqrt{Z(\mu^2, t)}. \tag{4.26}$$

einlaufend	auslaufend	I_a	I_b
$p \quad p$	$n \quad \Delta^{++}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$p \quad p$	$p \quad \Delta^{+}$	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3}$
$p \quad n$	$p \quad \Delta^{0}$	$-\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3}$

Tabelle 4.2: Isospinkoeffizienten für die Reaktion $NN \to N\Delta$. Die übrigen Kanäle ergeben sich aus Isospinsymmetrie.

Für das Quadrat des invarianten Matrixelementes $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ der Reaktion $NN \to N\Delta(1232)$ ergibt sich durch kohärente Superposition der zu den in Abbildung 4.6 dargestellten Feynman-Diagramme korrespondierenden Matrixelementen

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2} = \overline{|\mathcal{M}_a|^2} + \overline{|\mathcal{M}_b|^2} + \overline{\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b} + \overline{\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*}. \tag{4.27}$$

Der Querstrich über den Matrixelementen soll andeuten, daß die Mittelung über die Spins der Teilchen im Anfangszustand und die Summation über die Spins der Teilchen im Endzustand der Reaktion in den Quadraten der Matrixelemente enthalten ist. Die Summanden der Gleichung (4.27) haben dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_a|^2} &= I_a^2 \, \frac{f_{NN\pi}^2 f_{N\Delta\pi}^2}{m_\pi^4} \, \frac{F^2(t) F^2(t,\mu^2)}{(t - m_\pi^2)^2} \, 2\, M_N^2 \, t \left[t - (\mu - M_N)^2 \right] \\ & \quad \times \frac{\left[(\mu + M_N)^2 - t \right]^2}{3\mu^2} \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\overline{|\mathcal{M}_b|^2} = \overline{|\mathcal{M}_a|^2} \; (t \to u, I_a \to I_b) \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} & \overline{\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b} + \overline{\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*} = \\ & \quad I_a \, I_b \frac{f_{NN\pi}^2 f_{N\Delta\pi}^2}{4\, m_\pi^4} \, \frac{F(t) F(t,\mu^2)}{t - m_\pi^2} \, \frac{F(u) F(u,\mu^2)}{u - m_\pi^2} \\ & \quad \times 2\, M_N^2 \, \frac{1}{2\mu^2} \left\{ - \left[t\, u + \left(\mu^2 - M_N^2 \right) (t + u) - \mu^4 + M_N^4 \right] \right. \\ & \quad \times \left[t\, u + M_N \left(M_N + \mu \right) \left(\mu^2 - M_N^2 \right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{3} \left[t\, u - (\mu + M_N)^2 (t + u) + (M_N + \mu)^4 \right] \\ & \quad \left. \times \left[t\, u - M_N \left(\mu - M_N \right) \left(\mu^2 - M_N^2 \right) \right] \right\} \quad , \end{aligned} \tag{4.30}$$

mit

$$t = (p_1 - p_3)^2 \; , \; u = (p_1 - p_4)^2 \, . \tag{4.31}$$

I_a und I_b bezeichnen die Isospinkoeffizienten der Diagramme a und b aus Abbildung 4.6, die für alle Isospinkanäle in Tabelle 4.2 aufgelistet sind.

In [51] sind für den Parameter Λ und die Kopplungskonstanten $f_{NN\pi}$ und $f_{N\Delta\pi}$ die

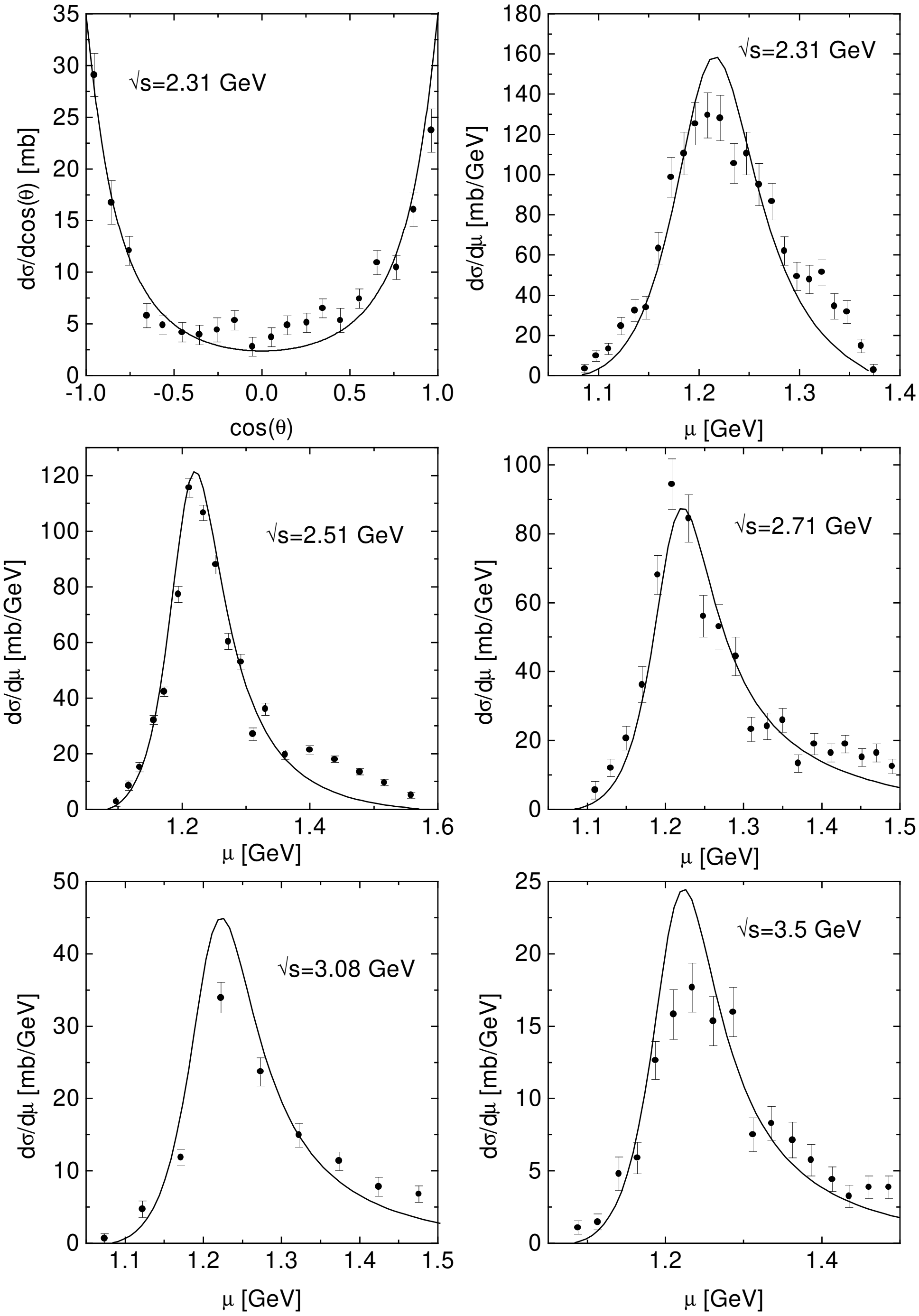

Abbildung 4.7: Aus dem Mesonaustauschmodell von Dimitriev resultierende differentielle $pp \rightarrow n\Delta(1232)^{++}$-Wirkungsquerschnitte. Die Daten sind aus [51] entnommen.

folgenden Werte angegeben, welche auch im CBUU-Modell verwendet werden:

$$\Lambda = 0.63\,\mathrm{GeV} \quad f_{NN\pi} = 1.008 \quad f_{N\Delta\pi} = 2.202 \quad m_\pi = 0.140\,\mathrm{GeV}. \tag{4.32}$$

Durch Einsetzen des Quadrates des invarianten Matrixelementes (4.27) in den Ausdruck (4.21) ergibt sich der massendifferentielle Wirkungsquerschnitt für die Produktion von $\Delta(1232)$ in Nukleon-Nukleon Stößen.
Der resultierende Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $pp \to n\Delta^{++}$ ist für verschiedene invariante Energien als Funktion der Deltamasse μ in Abbildung 4.7 im Vergleich zu den experimentellen Daten [51] dargestellt. Man erkennt, daß die im CBUU-Modell verwendeten Wirkungsquerschnitte die experimentellen Daten für die massendifferentiellen Wirkungsquerschnitte gut beschreiben. Man erreicht auch für die winkeldifferentiellen Wirkungsquerschnitte gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Dies ist in Abbildung 4.7 exemplarisch für eine invariante Energie von 2.31 GeV dargestellt. Der Beitrag des $\Delta(1232)$ zum totalen Wirkungsquerschnitt der 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen ist in Abbildung 4.11 durch die gestrichelten Linien dargestellt.

4.4.3 Der Wirkungsquerschnitt für 1π-Produktion

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes für 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen werden die Beiträge aller baryonischen Resonanzen zum entsprechenden Isospinkanal inkohärent aufsummiert. Für die $\Delta(1232)$-Produktion wird der Wirkungsquerschnitt aus Abschnitt 4.4.2 verwendet. Den Wirkungsquerschnitt für die Produktion höherer Resonanzen erhält man nach Integration der Gleichung (4.20) über die Resonanzmasse μ. a und b aus Gleichung (4.20) stellen den NN Anfangszustand und c, d, e den $NN\pi$ Endzustand der Reaktion $NN \to NN\pi$ dar.
Da die Isospin 3/2- und die Isospin 1/2-Resonanzen verschieden zu den einzelnen Isospinkanälen der 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen beitragen, werden die Wirkungsquerschnitte für die Produktion von Isospin 3/2- bzw. Isospin 1/2-Resonanzen in Proton-Proton-Kollisionen separat definiert. Ausgangspunkt sind die Wirkungsquerschnitte für die Produktion einfach geladener Resonanzen in Proton-Proton-Kollisionen

$$\begin{aligned} \sigma_{3/2} &= \sum_{I_R=\frac{3}{2}} p\,p \to p\,R^+ = \sigma_{p\,p \to p\,\Delta^+(1232)} \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi\,p_i\,s}\int_{M_N+m_\pi}^{\sqrt{s}-M_N} d\mu\,p_f \sum_{\substack{R\neq\Delta(1232)\\ I_R=\frac{3}{2}}} \frac{2}{\pi}\frac{\mu^2\,\Gamma_{R\to N\,\pi}(\mu)}{(\mu^2-M_R^2)^2+\mu^2\,\Gamma^2_{R,tot}(\mu)} \end{aligned} \tag{4.33}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{1/2} &= \sum_{I_R=\frac{1}{2}} p\,p \to p\,R^+ \\ &= \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi\,p_i\,s}\int_{M_N+m_\pi}^{\sqrt{s}-M_N} d\mu\,p_f \sum_{\substack{R\\ I_R=\frac{1}{2}}} \frac{2}{\pi}\frac{\mu^2\,\Gamma_{R\to N\,\pi}(\mu)}{(\mu^2-M_R^2)^2+\mu^2\,\Gamma^2_{R,tot}(\mu)}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Zur Definition von $\sigma_{3/2}$ und $\sigma_{1/2}$ wurden die Reaktionen mit zwei Protonen im Anfangszustand, also mit Gesamtisospin 1, verwendet. Die Wirkungsquerschnitte für Reaktionen, die eine Überlagerung mehrerer Isospinkanäle darstellen (wie z. B. $pn \to R^+ n$, Proton und Neutron können zu Gesamtisospin 0 und 1 koppeln), erhält man aus der inkohärenten Addition der einzelnen Beiträge. Die Stärke der einzelnen Beiträge ergibt sich unter der Annahme, daß das Quadrat des Matrixelementes $|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2$ für alle Isospinkanäle den gleichen Wert hat, aus den jeweiligen Isospin-Clebsch-Gordan Koeffizienten. So erhält man z. B. die Isospinkoeffizienten für die Produktion einer einfach geladenen Isospin 1/2-Resonanz N^{*+} in einem Proton-Neutron-Stoß wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\left|\langle p\, n|H_{int}|N^{*+}n\rangle\right|^2 = \\
&\quad\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle I=1, I_3=0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0\,0|\right) H_{int} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\rangle\right)\right|^2 \\
&\quad= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2 = \frac{1}{2}\,|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2 = I\,|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2 .
\end{aligned}$$

Die Isospinkoeffizienten I für alle anderen Isospinkanäle sind in Tabelle 4.5 angegeben. Zur Beschreibung der verschiedenen Isospinkanäle der 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen müssen noch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für den Zerfall der Resonanzen berücksichtigt werden. So setzt sich z. B. die Zerfallsbreite einer positiv geladenen Δ-Resonanz aus den Partialbreiten der möglichen Zerfälle zusammen,

$$\Gamma_{\Delta^+\to N\pi} = \Gamma_{\Delta^+\to p\pi^0} + \Gamma_{\Delta^+\to n\pi^+}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\Delta^+\to p\pi^0} &= \frac{2}{3}\Gamma_{\Delta\to N\pi}, \\
\Gamma_{\Delta^+\to n\pi^+} &= \frac{1}{3}\Gamma_{\Delta\to N\pi};
\end{aligned}$$

analog

$$\Gamma_{N^{*+}\to N\pi} = \Gamma_{N^{*+}\to p\pi^0} + \Gamma_{N^{*+}\to n\pi^+}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Gamma_{N^{*+}\to p\pi^0} &= \frac{1}{3}\Gamma_{N^*\to N\pi}, \\
\Gamma_{N^{*+}\to n\pi^+} &= \frac{2}{3}\Gamma_{N^*\to N\pi}.
\end{aligned}$$

Somit erhält man für die Produktion neutraler Pionen in Proton-Proton-Kollisionen z. B. die folgenden Beiträge:

$$\begin{aligned}
pp &\xrightarrow{\frac{1}{4}} p\Delta^+ \xrightarrow{\frac{2}{3}} pp\pi^0 \\
pp &\xrightarrow{1} pN^{*+} \xrightarrow{\frac{1}{3}} pp\pi^0 .
\end{aligned}$$

Die Zahlen über den Pfeilen entsprechen den Isospinkoeffizienten für die Reaktion $NN \to NR$ bzw. $R \to N\pi$. Man beachte, daß der Isospinkoeffizient $\frac{1}{4}$, der bei der

Produktion von Isospin 3/2-Resonanzen auftritt, in der Definition von $\sigma_{3/2}$ absorbiert ist. Somit erhält man für die Wirkungsquerschnitte der 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen, ausgedrückt durch $\sigma_{3/2}$ und $\sigma_{1/2}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{pp\to pp\pi^0} &= \frac{2}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2} && (4.35)\\
\sigma_{pp\to pn\pi^+} &= \frac{10}{3}\sigma_{3/2} + \frac{2}{3}\sigma_{1/2} && (4.36)\\
\sigma_{pn\to pp\pi^-} &= \frac{1}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2} && (4.37)\\
\sigma_{pn\to pn\pi^0} &= \frac{4}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2}. && (4.38)
\end{aligned}$$

4.4.4 Der Wirkungsquerschnitt für η-Produktion

Der Wirkungsquerschnitt für die η-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen ergibt sich ebenfalls aus Gleichung (4.20). Da in dem hier verwendeten Resonanzmodell nur die $N(1535)$-Resonanz an das η-Meson koppelt (s. Tabelle 4.1), erhält man den Wirkungsquerschnitt für die η-Produktion aus Gleichung (4.20) mit dem $N(1535)$ als intermediärer Resonanz und $NN\eta$ als Endzustand *cde*. Die Quadrate der invarianten Matrixelemente $\overline{|\mathcal{M}_{ab->Re}|^2}$ werden durch Fits an die experimentellen Daten für η-Produktion in Nukleon-Nukleon-Stößen erhalten. Für das Quadrat des Matrixelements für die $N(1535)$-Produktion in Proton-Proton-Kollisionen ergibt sich

$$\overline{\left|\mathcal{M}_{pp\to pN^+(1535)}\right|^2} = 16\pi \times 8\,\mathrm{mb\,GeV}^2. \quad (4.39)$$

Unter Verwendung dieses Matrixelementes erhält man den in Abbildung 4.8 im Vergleich zu den experimentellen Daten [70, 68] dargestellten Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $pp \to pp\eta$. Die experimentelle Daten des Wirkungsquerschnitt für η-Produktion in Proton-Neutron-Kollisionen liegen etwa einen Faktor 5 über dem für Proton-Proton Reaktionen [70]. Folglich erhält man für das Quadrat des Matrixelementes

$$\overline{\left|\mathcal{M}_{pn\to pN(1535)}\right|^2} = \overline{\left|\mathcal{M}_{pn\to nN^+(1535)}\right|^2} \approx 16\pi \times 40\,\mathrm{mb\,GeV}^2. \quad (4.40)$$

4.4.5 Der Wirkungsquerschnitt für ρ-Produktion

Die Quadrate der invarianten Matrixelemente für die Produktion der baryonischen Resonanzen, die in ein Nukleon und ein ρ-Meson zerfallen (s. Tabelle 4.1), werden durch einen Fit an die experimentellen Daten für die Reaktion

$$pp \to pp\rho^0 \quad (4.41)$$

bestimmt. Analog zu Gleichung (4.35) ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für die ρ^0-Produktion aus der Summe der Beiträge der $I = 3/2$- and $I = 1/2$-Resonanzen,

$$\sigma_{pp\to pp\rho^0} = \frac{2}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2}, \quad (4.42)$$

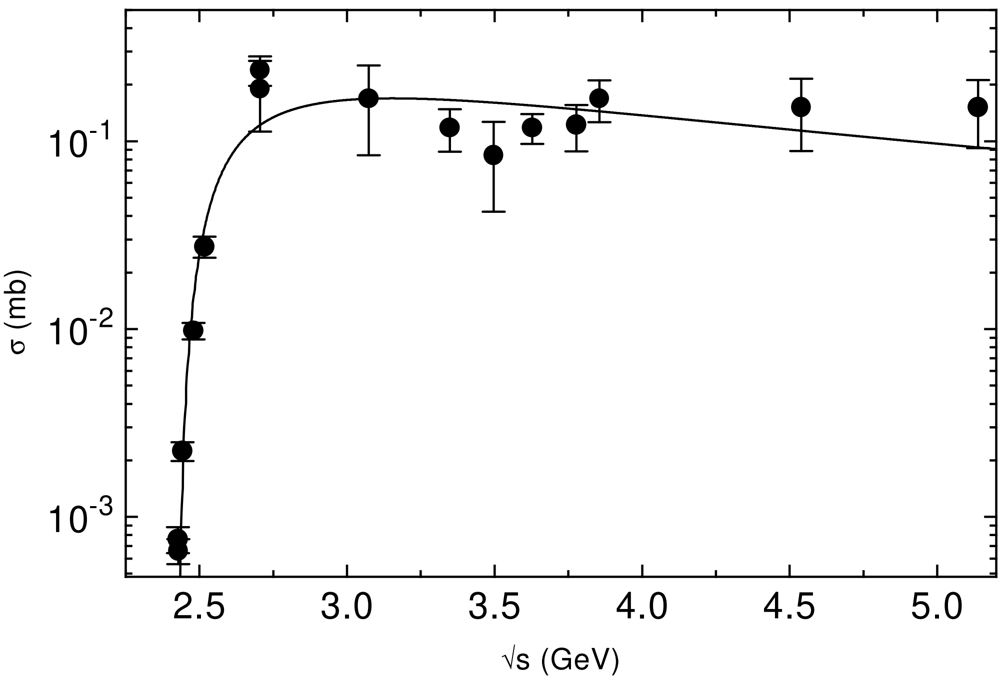

Abbildung 4.8: Wirkungsquerschnitt der Reaktion $pp \to pp\eta$ als Funktion der invarianten Energie. Die durchgezogene Linie stellt das Ergebnis des Resonanzmodells unter Verwendung des Quadrates des Matrixelementes aus Gleichung (4.39). Die Kreise repräsentieren die experimentellen Daten [70, 68].

wobei $\sigma_{3/2}$ und $\sigma_{1/2}$ entsprechend den Gleichungen (4.33) und (4.34) definiert sind. Allerdings erstrecken sich die Summen nur über Resonanzen mit nicht verschwindenden Partialbreiten für den Zerfall in ein Nukleon und ein ρ-Meson. Die resultierenden Quadrate der invarianten Matrixelemente sind in der zweiten Spalte der Tabelle 4.1 angegeben. In Abbildung 4.9 ist der so erhaltene Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Linie) im Vergleich zu den verfügbaren experimentellen Daten [68] dargestellt.

4.4.6 Der Wirkungsquerschnitt für 2π-Produktion

Wie bereits in Abschnitt 4.2 wird zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte der 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen angenommen, daß durch die Nukleon-Nukleon-Kollision eine höher liegende baryonische Resonanzen angeregt werden, die anschließend entsprechend ihrer Partialbreiten (s. Tabelle 4.1) in je ein Nukleon und zwei Pionen zerfallen:

$$1.\ NN \to NR \to N\Delta(1232)\pi \to NN\pi\pi \tag{4.43}$$
$$2.\ NN \to NR \to NN(1440)\pi \to NN\pi\pi \tag{4.44}$$
$$3.\ NN \to NR \to NN\rho \to NN\pi\pi \tag{4.45}$$
$$4.\ NN \to NR \to NN\sigma \to NN\pi\pi. \tag{4.46}$$

R steht hier für alle baryonische Resonanzen mit nicht verschwindender Partialbreite für den Zerfall in ein Nukleon und zwei Pionen. Zusätzlich zu diesen Prozessen

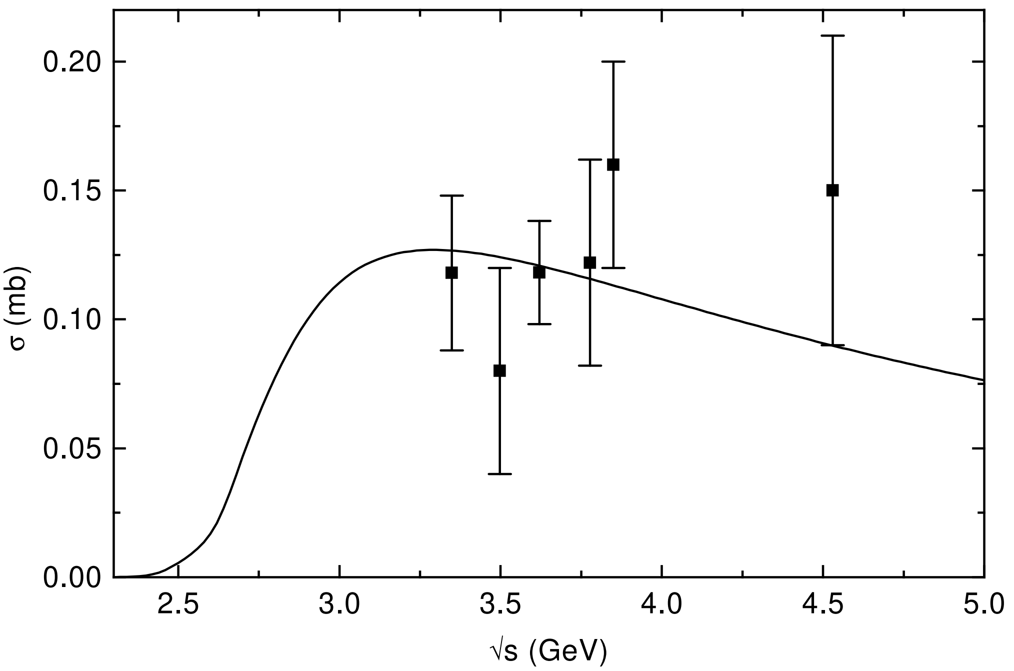

Abbildung 4.9: Wirkungsquerschnitt der Reaktion $pp \to pp\rho^0$ als Funktion der invarianten Energie. Die durchgezogene Linie entspricht dem Ergebnis des Resonanzmodells unter Verwendung der in Tabelle 4.1 angegebenen Quadrate der invarianten Matrixelemente. Die Quadrate repräsentieren die experimentellen Daten [68].

kann die 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen auch über die Anregung zweier $\Delta(1232)$ und deren Zerfall in je ein Nukleon und ein Pion erfolgen

$$NN \to \Delta(1232)\Delta(1232) \to NN\pi\pi. \tag{4.47}$$

Für den Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $NN \to \Delta(1232)\Delta(1232)$ werden im CBUU-Modell Parametrisierungen von Huber und Aichelin [52] verwendet. Diese Parametrisierungen sind in Tabelle 4.3 angegeben und in Abbildung 4.10 graphisch dargestellt. Neben dieser Reaktion werden im CBUU-Modell keine Kanäle zur Anregung zweier baryonischer Resonanzen (z.B. $NN \to \Delta(1232)N^*(1440)$) berücksichtigt.

Zur weiteren Beschreibung der 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen werden $\sigma^i_{3/2}$ und $\sigma^i_{1/2}$ ($i = 1,..,4$) definiert. Diese $\sigma^i_{3/2}$ und $\sigma^i_{1/2}$ ergeben sich aus den Gleichungen (4.33) und (4.34), indem $\Gamma_{R\to N\pi}$ durch die entsprechenden Partialbreiten Γ_i ($i = 1,..,4$) für die zweiten Stufen der Reaktionen (4.43) bis (4.46) ersetzt wird. Der Wirkungsquerschnitt für die 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen lautet somit

$$\sigma_{NN\to NN\pi\pi} = \sum_{i=1}^{4} n_i \sigma^i_{1/2} + \sum_{i=1}^{4} d_i \sigma^i_{3/2} + \sigma_{NN\to\Delta(1232)\Delta(1232)\to NN\pi\pi}. \tag{4.48}$$

Die n_i und d_i sind die Produkte der Isospinkoeffizienten der drei Schritte der Reaktionen (4.43) - (4.46). Diese Faktoren sind in Tabelle 4.4 für die Isospinkanäle, für die experimentelle Daten vorliegen, angegeben. $\sigma_{NN\to\Delta(1232)\Delta(1232)\to NN\pi\pi}$ wird analog bestimmt,

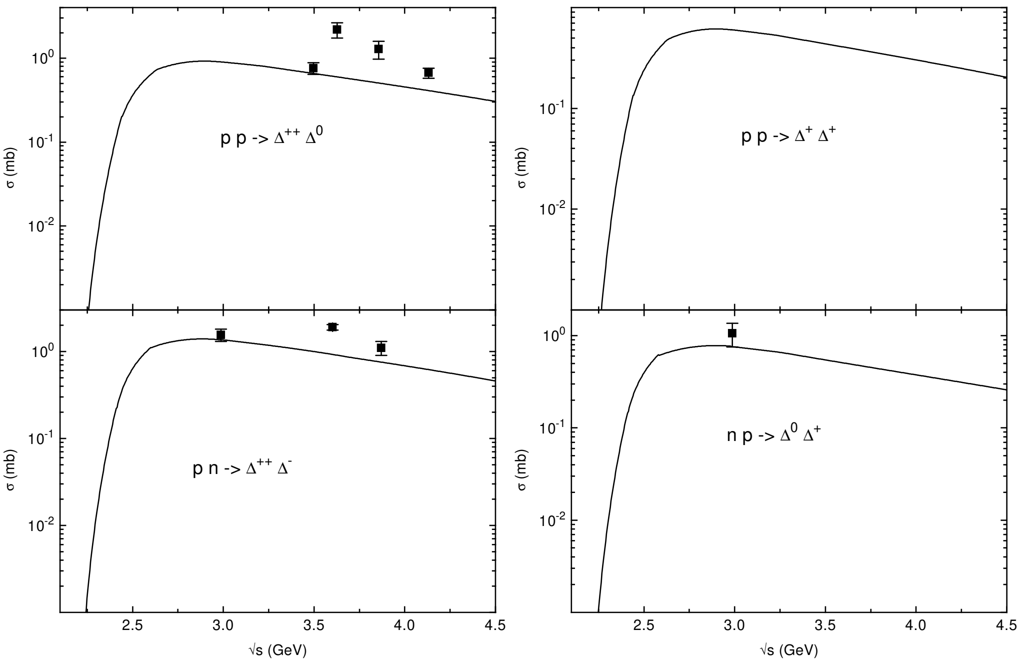

Abbildung 4.10: Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $pp \to \Delta^0\Delta^{++}$, $pp \to \Delta^+\Delta^+$, $pn \to \Delta^0\Delta^+$ und $pn \to \Delta^-\Delta^{++}$ als Funktion der invarianten Energie der Nukleon-Nukleon-Kollision im Vergleich zu experimentellen Daten [68]. Das Symbol Δ steht hier für die $\Delta(1232)$-Resonanz.

indem man die Wirkungsquerschnitte $\sigma_{NN\to\Delta(1232)\Delta(1232)}$, die zu einem bestimmten Isospinkanal beitragen können, mit dem Produkt der entsprechenden Isospinkoeffizienten für den Zerfall der beiden $\Delta(1232)$ multipliziert und anschließend inkohärent aufsummiert.
Bisher wurden die Quadrate der invarianten Matrixelemente $\overline{|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2}$ derjenigen Resonanzen, die an das ρ koppeln, aus dem Fit an die experimentellen Daten für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion $pp \to pp\rho$ bestimmt. Das Quadrat des invarianten Matrixelementes der $N(1535)$-Resonanz wurde analog aus den Daten zur η-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen extrahiert. Die Quadrate der invarianten Matrixelemente aller anderen im CBUU-Modell verwendeten baryonischen Resonanzen werden durch Anpassung an verfügbare experimentellen Daten [68] für 1- und 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen festgelegt. Die so erhaltenen Quadrate der Matrixelemente sind ebenfalls in Tabelle 4.1 angegeben. Die sich mit diesen Werten im Rahmen des Resonanzmodells ergebenden totalen Wirkungsquerschnitte für 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon Stößen sind in Abbildung 4.11 (durchgezogene Linien) dargestellt. Die gestrichelten Linien stellen die Beiträge des $\Delta(1232)$ zum totalen Wirkungsquerschnitt dar. Die gepunkteten Linien repräsentieren die Beiträge aller Isospin 1/2-Resonanzen und die strich-punktierten Linien korrespondieren zu den Beiträgen der höheren Isospin 3/2-Resonanzen. Man erkennt, daß der totale 1π-Produktionswirkungsquerschnitt mit dem zugrundeliegenden Resonanzmodell bis hin zu invarianten Energien von 5 GeV gut reproduziert wird.
In Abbildung 4.12 ist der resultierende Wirkungsquerschnitt für 2π-Produktion (4.48)

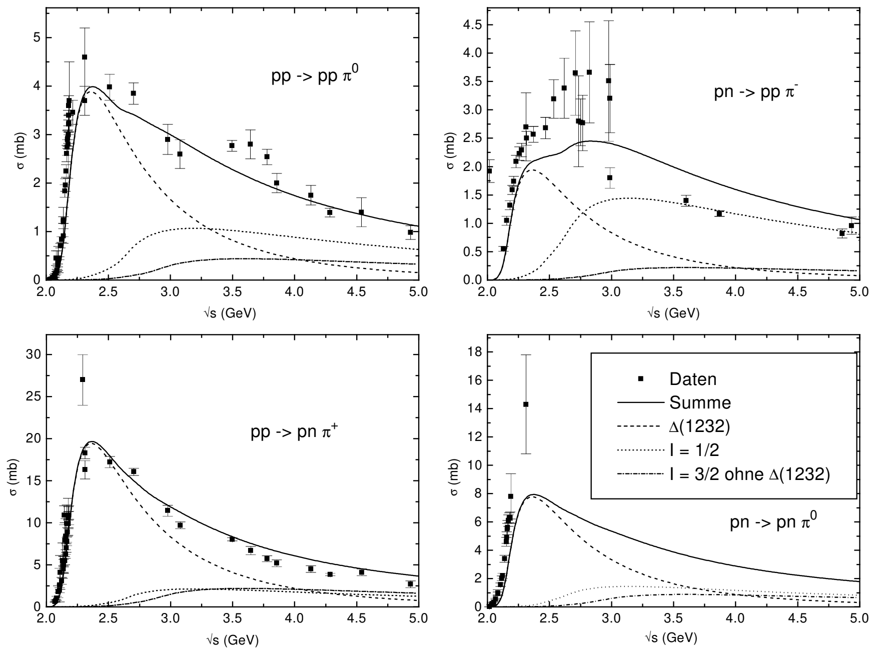

Abbildung 4.11: Der resultierende totale Wirkungsquerschnitt für 1π-Produktion (durchgezogene Linien) für verschiedene Isospinkanäle im Vergleich zu experimentellen Daten [68]. Gestrichelte Linien: Beiträge des $\Delta(1232)$; gepunktete Linien: Beiträge der Isospin 1/2-Resonanzen; strich-punktierte Linien: Beiträge der höheren Isospin 3/2-Resonanzen zum totalen Wirkungsquerschnitt.

für alle Isospinkanäle, für die experimentelle Daten [68] verfügbar sind, dargestellt. Wie im Fall der 1π-Produktion werden auch die Daten der 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen im Rahmen des Resonanzmodells zufriedenstellend reproduziert.

4.5 Der $NR \rightarrow NN$-Wirkungsquerschnitt

Die Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $NR \rightarrow NN$, wobei R hier sowohl für ein $\Delta(1232)$ als auch für eine höhere baryonische Resonanz steht, werden aus dem Gleichung (4.18) für einen Zwei-Teilchen-Endzustand gewonnen. Für die zur Bestimmung der Wirkungsquerschnitte notwendigen invarianten Matrixelemente werden im Fall des $\Delta(1232)$ die invarianten Matrixelemente des Ein-Meson-Austauschmodells von Dimitriev [51] und für die höheren Resonanzen die sich aus dem weiter oben diskutierten Resonanzmodell ergebenden Matrixelemente (s. Tabelle 4.1) verwendet.
Diese Vorgehensweise hat im Vergleich zu früheren Realisierungen des BUU-Modells den Vorteil, daß nicht mehr auf 'detailed balance'-Beschreibungen zur Bestimmung der $NR \rightarrow NN$-Wirkungsquerschnitte zurückgegriffen werden muß. Vielmehr sind die invarianten Matrixelemente sowohl als Funktion der invarianten Energie als auch als Funktion der Resonanzmasse festgelegt.

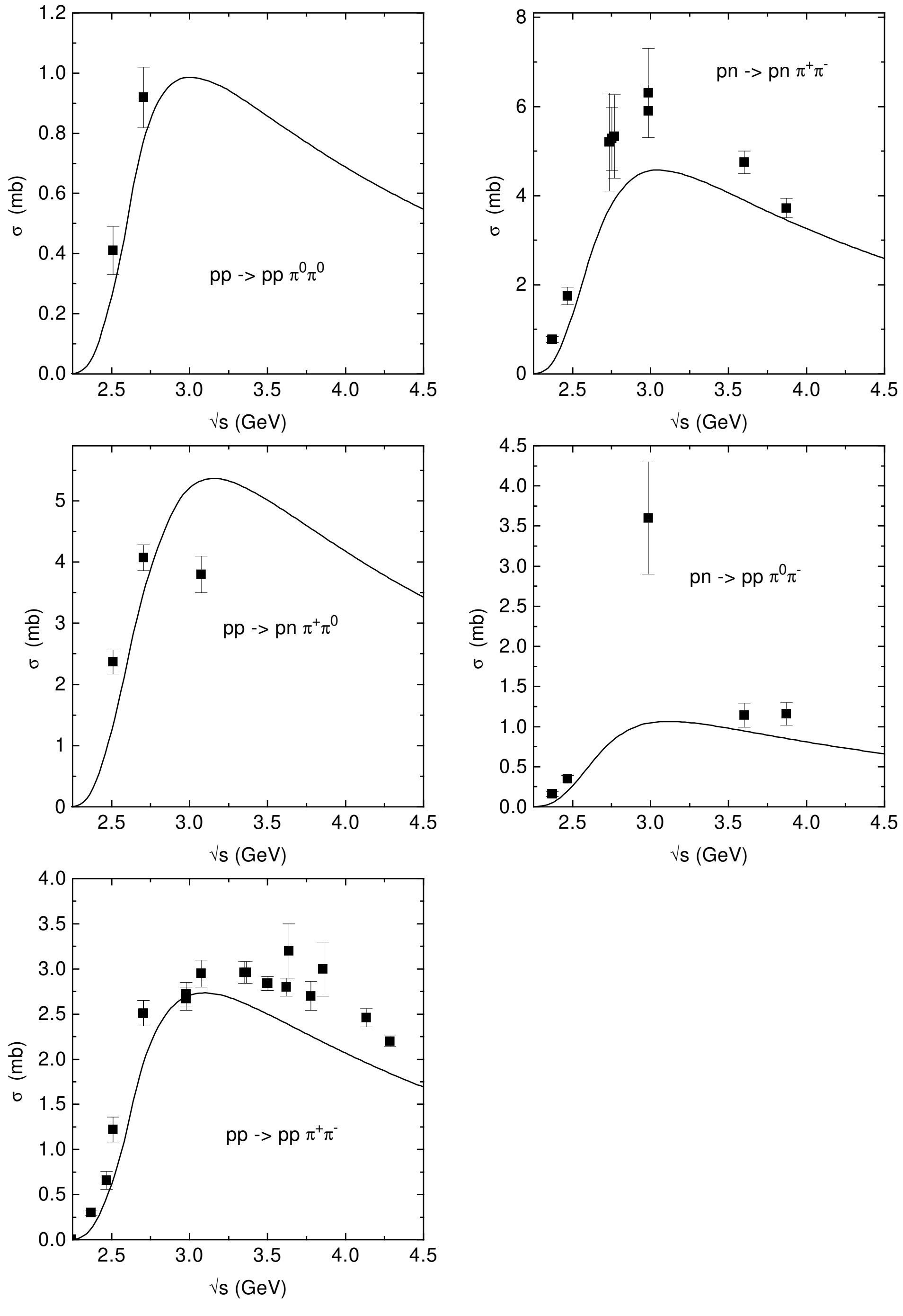

Abbildung 4.12: Der im Rahmen des Resonanzmodells bestimmte totale Wirkungsquerschnitt für die 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen (durchgezogene Linien) für verschiedene Isospinkanäle als Funktion der invarianten Energie im Vergleich zu experimentellen Daten [68].

4.6 Der $NR \to NR'$-Wirkungsquerschnitt

Zur Beschreibung von Kollisionen eines Nukleons mit einer Resonanz R im Anfangszustand und einem Nukleon und einer von R verschiedenen Resonanz R' im Endzustand wird für alle Resonanzen (einschließlich des $\Delta(1232)$) ein Quadrat des invarianten Matrixelements verwendet, das sich aus Mittelung über die Quadrate der invarianten Matrixelemente der Reaktionen $NN \to NR$ und $NN \to NR'$ ergibt. Analog zu Gleichung (4.20) ergibt sich folgender Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\substack{NR\to NR' \\ R\neq R'}} = \; & I \, \frac{0.5(\left|\mathcal{M}_{NN\to NR}\right|^2 + \left|\mathcal{M}_{NN\to NR'}\right|^2)\, 2\,(2J_{R'}+1)}{16\,\pi\, p_i\, s} \\ & \times \int d\mu \, p_f \, \frac{2}{\pi} \, \frac{\mu^2\,\Gamma_{R'}(\mu)}{\left(\mu^2 - M_{R'}^2\right)^2 + \mu^2\,\Gamma_{R'}^2(\mu)} . \end{aligned} \tag{4.49}$$

I steht hier für den Isospinkoeffizienten der entsprechenden Reaktion (s. Tabelle 4.5) und $J_{R'}$ für den Spin der baryonischen Resonanz im Ausgangszustand der Reaktion.

4.7 Direkte Produktion von Pionen in Nukleon-Nukleon-Stößen

Die Wirkungsquerschnitte für die Produktion von baryonischen Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen wurden so bestimmt, daß zusammen mit dem $NN \to N\Delta(1232)$-Wirkungsquerschnitt die experimentellen Daten der 1π-, 2π, η- und ρ-Produktion oberhalb des Massenbereichs des $\Delta(1232)$ reproduziert werden. Vergleicht man mit den Daten für die 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen, so erkennt man, daß mit den im Rahmen des Resonanzmodells erhaltenen Wirkungsquerschnitte die Daten direkt oberhalb der Pionenschwelle etwas unterschätzt werden (s. Abbildung 4.13).

4.7.1 Der $NN \to NN\pi$-Wirkungsquerschnitt

Dieses Defizit wird durch die Einführung eines weiteren Reaktionskanals, der direkten Produktion von Pionen in Nukleon-Nukleon-Stößen ($NN \to NN\pi$), behoben. Dazu werden die aus dem Resonanzmodell gewonnenen Wirkungsquerschnitte für die 1π Produktion von den experimentellen Daten subtrahiert. Diese Differenz bildet den Wirkungsquerschnitt für direkte Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen $\sigma_{NN\to NN\pi}$. Für alle Isospinkanäle kann $\sigma_{NN\to NN\pi}$ durch folgenden Ansatz gefittet werden,

$$\sigma_{NN\to NN\pi}(x) = A\, x^{n_1}\, e^{-(a\,x^{n_2} + b\,x)}, \tag{4.50}$$

mit

$$x = \frac{\sqrt{s} - 2M_N - m_\pi}{5\,\mathrm{GeV}}.$$

Die Parameter A, a, b, n_1 und n_2 sind in Tabelle 4.6 angegeben. Den totalen Wirkungsquerschnitt für 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen erhält man durch inkohärente Addition des Beitrages aus dem Zerfall der baryonischen Resonanzen und

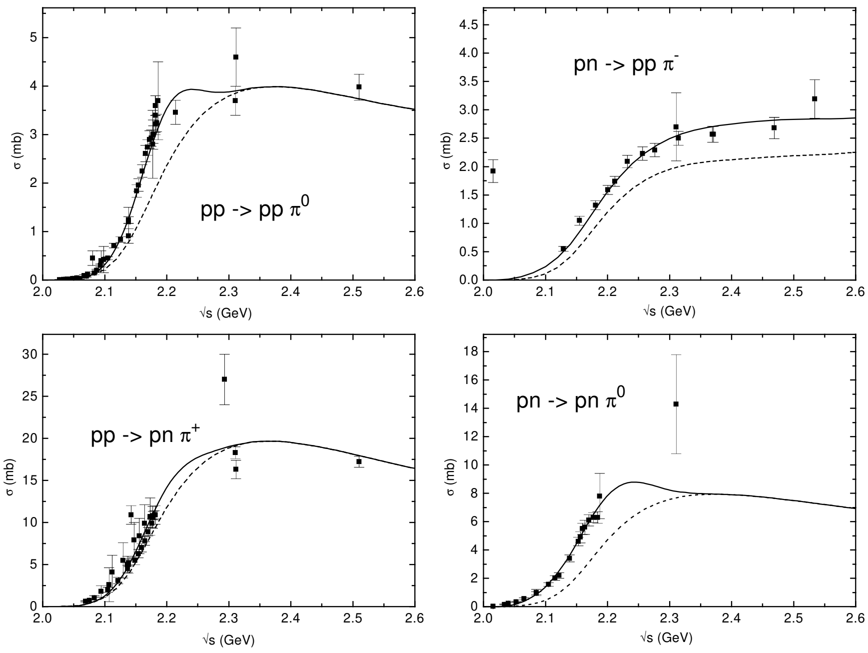

Abbildung 4.13: Der totale Wirkungsquerschnitt für 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen im Bereich der Pionenschwelle im Vergleich zu experimentellen Daten [68]. Die gestrichelten Linien geben den Beitrag aus dem Zerfall der baryonischen Resonanzen an. Die durchgezogenen Linien geben die totalen Wirkungsquerschnitte an, die aus der inkohärenten Addition der Resonanzbeiträge und des Beitrages aus der direkten π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen resultieren.

$\sigma_{N\,N \to N\,N\,\pi}$. Dieser Wirkungsquerschnitt ist in Abbildung 4.13 (durchgezogene Linien) im Vergleich zu den in Abschnitt 4.4 ermittelten Beiträgen der baryonische Resonanzen (gestrichelte Linien) dargestellt. Die Wirkungsquerschnitte für die nicht dargestellten Kanäle ergeben sich aus Isospinsymmetrie.

4.7.2 Die $NN\pi \to NN$-Rate

Nach der Einführung der Reaktion $NN \to NN\pi$ muß im CBUU-Modell aus Konsistenzgründen auch die Rückreaktion $\pi NN \to NN$ eingeführt werden. Dazu wird für jedes Pion die Rate $\pi NN \to NN$ als Funktion der lokalen Protonen- und Neutronendichten berechnet. Die Pionenabsorption geschieht entsprechend dieser 'Zerfallsrate' an zwei zufällig ausgewählten Nukleonen.
Unter der Annahme, daß das invariante Matrixelement der Reaktion $N_1 + N_2 \to N_3 + N_4 + \pi$ nur von der invarianten Energie der Reaktion abhängt, kann der Wirkungsquerschnitt $\sigma_{N_1\,N_2 \to N_3\,N_4\,\pi}$ in folgender Form geschrieben werden (s. Abschnitt 4.7.1) [49],

$$\sigma_{N_1 N_2 \to N_3 N_4 \pi}(\sqrt{s}) = \frac{S_{N_1,N_2}}{64\,(2\,\pi)^3\,p_i\,\sqrt{s}^3}\,\left|\mathcal{M}_{N_1\,N_2 \to N_3\,N_4\,\pi}(\sqrt{s})\right|^2 \int dm_{34}^2\,dm_{3\pi}^2. \quad (4.51)$$

S_{N_1,N_2} ist der Symmetriefaktor für die Nukleonen N_1 and N_2, p_i ist der Betrag des Dreierimpulses im Schwerpunktsystem der Nukleonen im Anfangszustand der Reaktion und die Massen m_{ij} erhält man aus der Summe der entsprechenden Viererimpulse

$$m_{34}^2 = (p_3 + p_4)^2,\ m_{3\pi}^2 = (p_3 + p_\pi)^2.$$

Die Übergangsrate für die Absorption eines Pions an den Nukleonen N_3 und N_4 ist durch den Ausdruck [67]

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\delta^4 (p_{N,1} + p_{N,2} - p_{N,3} - p_{N,4} - p_\pi)\ |\mathcal{M}|^2}{V^5} \quad , \tag{4.52}$$

gegeben. Bei V handelt es sich um ein Normalisierungsvolumen [67]. Multiplikation dieser Gleichung mit den Phasenraumfaktoren der Nukleonen im Endzustand der Reaktion (N_1, N_2) und Integration über $d^3p_{N_1}$ und $d^3p_{N_2}$ ergibt die Rate

$$\Gamma_{\pi N_3 N_4 \to N_1 N_2} \quad = \quad S_{N_1,N_2} \frac{p_f}{4\,\pi\,\sqrt{s}} |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{2\,E_\pi} \frac{\rho_{N,3}}{2E_{N,3}} \frac{\rho_{N,4}}{2E_{N,4}}. \tag{4.53}$$

Die Faktoren $1/(2E)$ ergeben sich aus der Normierung der Wellenfunktionen [67]. Bei p_f handelt es sich hier um den Dreierimpuls der Nukleonen N_1 und N_2 im Schwerpunktsystem der Reaktion; ρ_{N_3} und ρ_{N_4} repräsentieren entsprechend des Isospinkanals die lokalen Protonen- und Neutronendichten und berücksichtigen somit die Einflüsse des nuklearen Mediums.

4.8 Elastische Baryon-Baryon-Querschnitte

Zur Beschreibung der elastischen Nukleon-Nukleon Streuung wird die Parametrisierung des Wirkungsquerschnittes von Cugnon et al. [37, 50] verwendet. Danach lautet der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{NN\to NN} = \left(\frac{35}{1 + \frac{\sqrt{s}-2M_N}{\mathrm{GeV}}} + 20 \right) \mathrm{mb}, \tag{4.54}$$

wobei s das Quadrat der invarianten Energie der Reaktion und $M_N = 938\ MeV/c^2$ ist die Nukleonenmasse ist. Die Parametrisierung für die Winkelverteilung lautet weiterhin

$$\frac{d\sigma_{nn\to NN}}{d\Omega} = e^{-A(s)t}, \tag{4.55}$$

wobei t das Quadrat des Impulsübertrages ist mit

$$A(s) = 6 \frac{[3.65\,(\sqrt{s} - 2M_N)]^6}{1 + [3.65\,(\sqrt{s} - 2M_N)]^6}.$$

Die Wirkungsquerschnitte für elastische Nukleon-Resonanz Streuung ($NR \to NR$) (mit derselben baryonischen Resonanz im Anfangs- und Endzustand der Reaktion) werden aus dem Querschnitt für elastische Nukleon-Nukleon Streuung abgeleitet: Unter der Annahme, daß zu dem totalen Wirkungsquerschnitt (4.54) eine isotrope Winkelverteilung der Teilchen im Endzustand korrespondiert, kann das Quadrat des invarianten Matrixelements aus dem totalen Wirkungsquerschnitt bestimmt werden,

$$|\mathcal{M}_{NN\to NN}|^2 = 16\,\pi\,s \left(\frac{35}{1 + \frac{\sqrt{s}-2M_N}{\mathrm{GeV}}} + 20 \right) \mathrm{mb}. \tag{4.56}$$

Einsetzen dieses Matrixelements (4.56) in Gleichung (4.20) liefert dann den totalen Wirkungsquerschnitt für elastische Nukleon-Resonanz Streuung

$$\sigma_{NR \to NR} = \frac{|\mathcal{M}_{NN \to NN}|^2}{16\,\pi\,p_i\,s} \int d\mu\,p_f\,\frac{2}{\pi}\,\frac{\mu^2\,\Gamma_R(\mu)}{(\mu^2 - M_R^2)^2 + \mu^2\,\Gamma_R^2(\mu)}. \tag{4.57}$$

Es soll noch bemerkt werden, daß mit dem Wirkungsquerschnitt (4.57) nicht nur rein elastische Streuung beschrieben wird. Ebenso wird zugelassen, daß die Resonanz im Endzustand eine von der Masse der Resonanz im Anfangszustand der Reaktion verschiedene Masse zugewiesen bekommt.

$pp \to \Delta^0\Delta^{++}$	
$x = \sqrt{s}$ (GeV)	σ (mb)
$2.016 - 2.33$	$1.361(x - 2.152)^{5.299}$
$2.33 - 2.63$	$2.794x - 6.626$
$2.63 - 2.98$	$0.9205 - 2.763(x - 2.898)^2$
$2.98 - 3.24$	$2.192 - 0.4320x$
$3.24 - 4.5$	$6.898x^{-1.417} - 0.5140$

$pn \to \Delta^0\Delta^{+}$	
$x = \sqrt{s}$ (GeV)	σ (mb)
$2.152 - 2.412$	$144.8(x - 2.152)^{5.083}$
$2.412 - 2.58$	$2.841x - 6.707$
$2.58 - 2.98$	$0.7819 - 1.777(x - 2.869)^2$
$2.98 - 3.26$	$1.894 - 0.3798x$
$3.26 - 4.5$	$8.371x^{-1.926} - 0.2035$

$pn \to \Delta^-\Delta^{++}$	
$x = \sqrt{s}$ (GeV)	σ (mb)
$2.152 - 2.412$	$239.6(x - 2.152)^{5.148}$
$2.412 - 2.6$	$4.738x - 11.21$
$2.6 - 2.98$	$1.395 - 3.615(x - 2.884)^2$
$2.98 - 3.69$	$3.517 - 0.7197x$
$3.69 - 4.5$	$9.358x^{-1.242} - 0.9878$

Tabelle 4.3: Parametrisierungen der $\Delta(1232)\Delta(1232)$-Produktionswirkungsquerschnitte für die Isospinkanäle $pp \to \Delta^0\Delta^{++}$, $pn \to \Delta^0\Delta^+$ und $pn \to \Delta^-\Delta^{++}$ aus [52]. Den Wirkungsquerschnitt der Reaktion $pp \to \Delta^+\Delta^+$ erhält man aus dem der Reaktion $pp \to \Delta^0\Delta^{++}$ durch Multiplikation mit 2/3. Aufgrund der Isospinsymmetrie ist der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $nn \to \Delta^+\Delta^-$ identisch mit dem der Reaktion $pp \to \Delta^0\Delta^{++}$. Ebenso gleichen sich die Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $nn \to \Delta^0\Delta^0$ und $pp \to \Delta^+\Delta^+$.

	$pp \to pp\pi^+\pi^-$	$pp \to pp\pi^0\pi^0$	$pp \to pn\pi^+\pi^0$	$pn \to pn\pi^+\pi^-$	$pn \to pp\pi^-\pi^0$
n_1	5/9	2/9	2/9	5/9	2/9
n_2	4/9	1/9	4/9	4/9	4/9
n_3	1/3	0	2/3	1/3	2/3
n_4	2/3	1/3	0	2/3	0
d_1	26/45	2/45	22/9	52/45	17/45
d_2	2/9	2/9	14/9	4/9	5/9
d_3	2/3	0	10/3	2/3	1/3
d_4	0	0	0	0	0

Tabelle 4.4: Produkte der Isospinkoeffizienten für die dritte Stufe der Reaktionen (4.43) - (4.46) für die Isospinkanäle, für die experimentelle Daten vorliegen.

				I
N^+	N^+	N^+	N^+	1
N^+	N^0	N^+	N^0	1/2
N^+	N^+	N^0	Δ^{++}	3/4
N^+	N^+	N^+	Δ^+	1/4
N^+	N^0	N^+	Δ^0	1/4
N^+	Δ^{++}	N^+	Δ^{++}	1
N^+	Δ^+	N^0	Δ^{++}	3/8
N^+	Δ^+	N^+	Δ^+	5/8
N^+	Δ^0	N^+	Δ^0	1/2
N^+	Δ^-	N^+	Δ^-	5/8

Tabelle 4.5: Isospinkoeffizienten I für Baryon-Baryon-Kollisionen. N und Δ repräsentieren Teilchen mit Isospin 1/2 bzw. Isospin 3/2. Die Koeffizienten für Kanäle, die nicht explizit aufgeführt sind, ergeben sich aus Isospinsymmetrie.

Kanal	A [mb]	a	b	n_1	n_2
$p \quad p \to p \quad p \quad \pi^0$	61.3	1.52	2.50	6.18	3.48
$p \quad p \to p \quad n \quad \pi^+$	122.6	1.52	2.50	6.18	3.48
$p \quad n \to p \quad p \quad \pi^-$	24.9	3.30	0.85	1.93	0.002
$p \quad n \to p \quad n \quad \pi^0$	7.25	0.88	0	2.31	3.64

Tabelle 4.6: Fitparameter für den Wirkungsquerschnitt für direkte Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen $\sigma_{NN\to NN\pi}$ (Gleichung (4.50)).

Kapitel 5

Numerische Realisierung des CBUU-Modells

5.1 Die Testteilchenmethode

In diesem Abschnitt wird die numerische Methode zur Lösung der Transportgleichungen (2.21) für die Phasenraumdichten $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)$ der Baryonen und Mesonen beschrieben. Im folgenden wird der Index i, der die Teilchenspezies bezeichnet, unterdrückt und die Diskussion exemplarisch an der Phasenraumdichte für die Nukleonen durchgeführt. Die Behandlung der anderen Teilchensorten ergibt sich analog.
Eine direkte numerische Lösung der Gleichungen (2.21) ist mit den heute zur Verfügung stehenden Computern nicht möglich, denn dies würde erfordern, daß die 6-dimensionale Phasenraumdichte $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ in der Zeit propagiert werden müßte. Zur Lösung dieser Gleichungen bedient man sich der sog. Testteilchenmethode, in der die kontinuierliche Phasenraumdichte durch folgenden Ansatz diskretisiert wird,

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) \;=\; \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{A(t)\,N} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t))\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_i(t)). \tag{5.1}$$

Die Phasenraumdichte wird somit durch Produkte von δ-Funktionen in den räumlichen Komponenten von Impuls- und Ortskoordinaten dargestellt. Dies entspricht der Propagation von klassischen Teilchen, den sog. Testteilchen, die die Nukleonen repräsentieren. Die gesamte Phasenraumdichte der Nukleonen erhält man aus der Gesamtzahl der Nukleonen-Testteilchen $A(t)N$ zur Zeit t. Hier gibt N die Zahl der Testteilchen pro physikalischem Teilchen an, d.h. ein Nukleon, eine baryonische Resonanz oder ein Meson wird jeweils von N Testteilchen repräsentiert. Die Tatsache, daß ein physikalisches Teilchen von N Testteilchen dargestellt wird, kann auch wie folgt interpretiert werden: Zur Simulation einer Schwerionenkollision werden N Simulationen parallel ausgeführt. Zur Ermittlung der Ergebnisse wird am Ende oder auch schon während der Rechnung über die N Ensembles gemittelt. $A(t)$ gibt die Zahl der Nukleonen an, die sich zur Zeit t in der Simulation befinden. Aufgrund der inelastischen Reaktionen (s. Kapitel 4) ist diese Zahl nicht konstant. Lediglich die Summe über die $A(t)$ für die verschiedenen Baryonenspezies liefert wegen Baryonenzahlerhaltung eine Konstante.

5.1.1 Berechnung der Dichten und Ströme

Den Viererbaryonenstrom $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ erhält man durch Integration der Phasenraumdichte über den Impuls

$$j^\mu(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{E} p^\mu f(\vec{r}, \vec{p}, t), \tag{5.2}$$

mit $p^\mu = (E, \vec{p})$ und $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^*(\vec{r}, \vec{p})^2}$. Verwendete man den Testteilchenansatz zur numerischen Berechnung von j^μ, so erhielte man die Baryonendichten und -ströme als diskrete Funktion von den Testteilchenkoordinaten $\vec{r_i}(t)$. Dieser Ausdruck wäre numerisch schwer zu handhaben. Daher erfolgt die numerische Berechnung von j^μ im CBUU-Modell auf einem diskreten Ortsraumgitter. Die Dichten und Ströme an einem Ort $\vec{r_k}$ ergeben sich dann aus der Summe aller Testteilchen, die sich in der zu $\vec{r_k} = (x_k, y_k, z_k)$ gehörenden Gitterzelle k befinden,

$$j^\mu(x_k, y_k, z_k) = \frac{1}{N} \sum_{i:\vec{r_i}\epsilon V_k} \frac{p_i^\mu}{E_i}, \tag{5.3}$$

wobei V_k das Volumen und die Ortskoordinaten der Gitterzelle k repräsentiert,

$$\begin{aligned} V_k \equiv \{\vec{r} \mid \quad & (x_k - \frac{dx}{2} \leq r_x \leq x_k + \frac{dx}{2}, \\ & y_k - \frac{dy}{2} \leq r_y \leq y_k + \frac{dy}{2}, \\ & z_k - \frac{dz}{2} \leq r_z \leq x_z + \frac{dz}{2})\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Aufgrund des Speicherplatzbedarfs beträgt die maximal mögliche Zahl der Testteilchen circa 100000, was bedeutet, daß bei $dx = dy = dz = 1$ fm sich bei einer Dichte von ρ_0 in einer $Au+Au$-Kollision etwa 40 Testteilchen in einer Gitterzelle befinden. Dies führt zu statistischen Schwankungen im Bereich von 15%. Diese Schwankungen nehmen in Bereichen kleiner Dichte - wie am Rand eines Kernes oder in der Expansionsphase einer Schwerionenkollision - noch zu und erschweren die Berechnung der Mittleren-Feld-Potentiale und somit die numerische Behandlung der Testteilchenpropagation (s. Abschnitt (5.4.2)). Daher ergibt sich die Notwendigkeit, die Dichten und Ströme zu 'glätten'.

Diese Glättung wird erreicht, indem die Testteilchen zur Berechnung von j^μ nicht als δ-Funktionen im Ortsraum behandelt werden, sondern als Gauß-Pakete. Dies führt dazu, daß ein Testteilchen i nicht nur in der Gitterzelle, in der es sich befindet, zur Dichte und zu den Strömen beiträgt, sondern auch - entsprechend seinem Gauß-Gewicht - in den Nachbarzellen. Die so erhaltenen 'geschmierten' j^μ sind analog zu den Gleichungen (5.3) durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$j^\mu(x_k, y_k, z_k) = \frac{1}{N} \sum_{i:\vec{r_i}\epsilon V_k} \frac{p_i^\mu}{E_i} \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{3/2}} e^{\frac{-(\vec{r_i}-\vec{r_k})^2}{2\Delta^2}}. \tag{5.5}$$

In Gleichung (5.5) gibt Δ die Breite der Gauß-Pakete an und hat den Wert $1fm$. Die Effekte der Glättung der Baryonendichte und der Baryonenströme sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Hier ist das Dichteprofil eines Au-Kernes entlang der z-Achse

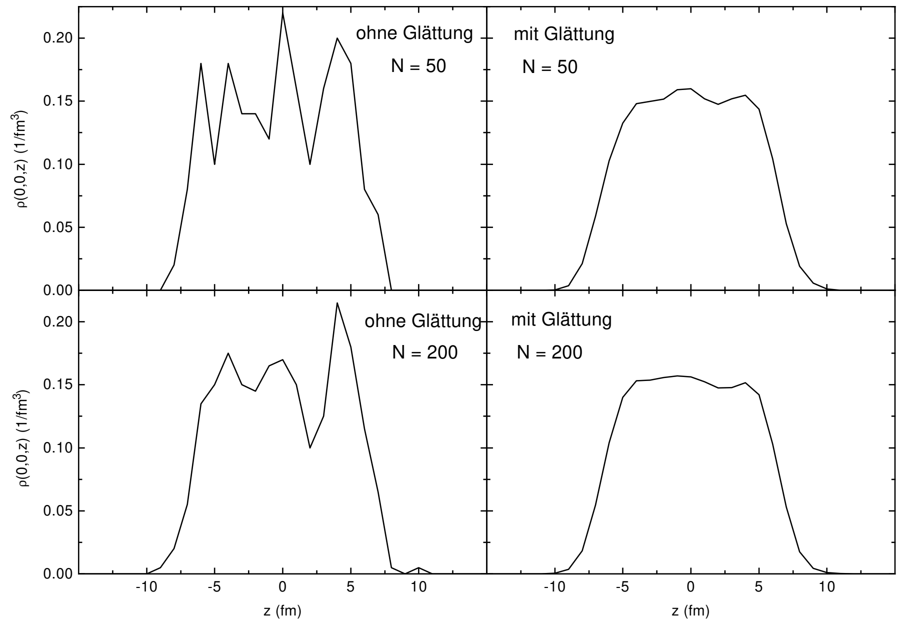

Abbildung 5.1: Dichteprofil eines Au-Kernes für $\vec{r} = (0, 0, z)$ für 50 Testteilchen pro Nukleon (oben) und 200 Testteilchen pro Nukleon (unten) mit (rechts) und ohne (links) Glättung der Baryonendichte.

angegeben. Die linke Spalte stellt den initialisierten Kern ohne Glättung der Dichte dar, während in der rechten Spalte das Dichteprofil desselben Kernes mit Glättung zu sehen ist. Für die Resultate im oberen Teil der Abbildung wurden 50 Testteilchen pro Nukleon verwendet, während im untern Teil $N = 200$ angenommen wurde. In beiden Fällen erkennt man, daß durch die Glättung die statistischen Schwankungen deutlich unterdrückt werden. Ohne Glättung der Dichte nehmen die Fluktuationen nur unwesentlich ab, wenn die Testteilchenzahl vervierfacht wird. Anhand der rechten Spalte erkennt man, daß schon bei $N = 50$ die statistischen Schwankungen durch die Glättung vom $20 - 30\%$ auf circa 5% verringert werden. Ein ähnliches Bild ergibt sich für 200 Testteilchen pro Nukleon. Erhöht man hingegen die Testteilchenzahl bei Verwendung des Glättungsalgorithmus, so verbessert sich die Güte des Dichteprofils nur noch geringfügig (rechte Spalte). Ein Nachteil des Glättungsalgorithmus ist allerdings, daß die räumliche Ausdehnung des Kernes größer wird und sich somit der mittlere Kernradius erhöht. Bei einem Ca-Kern ergibt sich eine Erhöhung um circa $5 - 10\%$, während sie im Fall eines Au-Kernes nur im Bereich von 2% liegt. Diese Effekte sind bei der Simulation von Schwerionenkollisionen vernachlässigbar.

5.2 Berechnung der Einteilchen-Potentiale

Für alle Baryonen, also sowohl für die Nukleonen als auch für die baryonischen Resonanzen werden dieselben Mittleren-Feld-Potentiale verwendet. In Kapitel 3.3 wurde bereits erläutert, wie die kovarianten skalaren Einteilchen-Potentiale im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie (LRF) aus den nicht relativistischen Parametrisierungen gewonnen werden. Hier soll nun dargelegt werden, wie die nicht relativistischen Para-

metrisierungen im LRF ausgewertet werden.
In das Skyrme-Potential (3.23) und in die ersten zwei Terme der Parametrisierung des impulsabhängigen Potentials (3.25) geht nur die Baryonendichte ein. Zur numerischen Auswertung dieser Ausdrücke wird die geglättete Baryonendichte (s. Abschnitt 5.1.1) im LRF verwendet. Der Ausdruck

$$U(\rho(\vec{r}),\vec{p}) \sim \frac{C}{\rho_0}\sum_{I',S'}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{f_{I',S'}(\vec{r},\vec{p'})}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2} \tag{5.6}$$

in Gleichung (3.25) bereitet jedoch Schwierigkeiten bei der numerischen Auswertung. Setzt man in diesen Ausdruck den Ansatz (5.1) ein, so erhält man für den impulsabhängigen Anteil des Einteilchen-Potentials eines Testteilchens k, am Ort $\vec{r_k}$

$$U(\rho(\vec{r_k}),\vec{p}) \sim \frac{C}{\rho_0}\frac{1}{N}\sum_{i:\vec{r_i}\epsilon V_k}\frac{1}{1+\left(\frac{\vec{p_k}-\vec{p_i}}{\Lambda}\right)^2}, \tag{5.7}$$

wobei N wieder die Zahl der Testteilchen pro Nukleon angibt und V_k analog zu (5.4) definiert ist. Zur Bestimmung des Potentials eines Testteilchens muß also über alle anderen Testteilchen in derselben Gitterzelle summiert werden. Dies bedeutet, daß die Potentialberechnung ein N^2-Problem darstellt. Aufgrund der Häufigkeit, mit der die Potentiale im CBUU-Modell ausgewertet werden müssen, ist es nicht möglich mit vertretbarem CPU-Zeit Aufwand die Mittleren-Feld-Potentiale direkt aus der Aktuellen Testteilchenverteilung $f(\vec{r},\vec{p},t)$ zu berechnen. Zur Berechnung der impulsabhängigen Einteilchen-Potentiale muß also auf Näherungen zurückgegriffen werden.

5.2.1 Die lokale Thomas-Fermi Näherung

Zur Auswertung des impulsabhängigen Anteils des Einteilchen-Potential in der lokalen Thomas-Fermi Näherung geht man davon aus, daß im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie (LRF) am Ort $\vec{r}$ mit der Baryonendichte $\rho(\vec{r})$ alle Einteilchenzustände im Impulsraum gleichmäßig bis zu einem lokalen Fermiimpuls

$$p_F(\vec{r}) = \left(\frac{3}{2}\pi^2\rho(\vec{r})\right)^{\frac{1}{3}} \tag{5.8}$$

gefüllt sind. Die lokale Phasenraumdichte für Nukleonen $f(\vec{r},\vec{p})$ lautet dann

$$f(\vec{r},\vec{p}) = \theta(p_F(\vec{r})-p), \tag{5.9}$$

p gibt in Gleichung (5.9) den Absolutbetrag des Teilchenimpulses $\vec{p}$ an. In dieser Näherung ist das Integral (5.6) analytisch lösbar und man erhält [59]

$$\begin{aligned}\frac{C}{\rho_0}\sum_{I',S'}\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{f_{I',S'}(\vec{r},\vec{p'})}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2} &= 4\frac{C}{\rho_0}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{\Theta(p_f(\vec{r})-p')}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2}\\ = \quad \frac{4}{(2\pi)^3}\frac{C}{\rho_0}\pi\Lambda^3\Bigg[\frac{p_F^2(\vec{r})+\Lambda^2-p^2}{2p\Lambda}ln\frac{(p+p_F(\vec{r}))^2+\Lambda^2}{(p-p_F(\vec{r}))^2+\Lambda^2}&+\frac{2p_F(\vec{r})}{\Lambda}\\ -2\left[arctan\frac{p+p_F(\vec{r})}{\Lambda}-arctan\frac{p-p_F(\vec{r})}{\Lambda}\,]\right]&.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Der Faktor 4 ergibt sich - unter der Annahme, daß spin- und isospinsymmetrische Kernmaterie vorliegt - aus der Summation über Spin und Isospin. Das impulsabhängige Einteilchen-Potential eines Teilchens erhält man aus der Summe des lokalen Anteils (s.o.) und (5.10). Dabei ist in der lokalen Thomas-Fermi Näherung die Kenntnis des Impulses des Teilchen, für das das Potential bestimmt werden soll, und die Baryonendichte am Ort, an dem sich das Teilchen befindet, ausreichend. Beide Größen sind im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie am Ort des Teilchens zu verwenden.
Für einen ruhenden Kern ist die lokale Thomas-Fermi Näherung sicherlich eine gute Näherung, da das lokale Ruhesystem der Kernmaterie mit dem Ruhesystem der Kernes zusammenfällt und alle Einteilchenniveaus bis zur Fermikante gefüllt sind. Gleiches gilt für einen sich bewegenden Kern, da die Lorentz-Transformation ins lokale Ruhesystem der Kernmaterie bewirkt, daß die Potentiale im Ruhesystem des Kernes berechnet werden. In der Anfangsphase einer Schwerionenkollision gilt dasselbe, solange die beiden Kerne im Ortsraum noch nicht überlappen. Überlappen die beiden Schwerionen im Ortsraum und die Reaktionszone ist noch nicht äquilibriert, so verliert die lokale Thomas-Fermi Näherung sicherlich an Gültigkeit, da in diesem Fall die Einteilchenniveaus nicht gleichmäßig bis zur Fermikante gefüllt sind und somit die aktuelle Nukleonen- bzw. Testteilchenverteilung nicht einer Θ-Funktion entspricht, wie in Gleichung (5.9) angenommen wurde. Um dies zu verbessern, wurde in das CBUU-Modell zusätzlich zur eben beschriebenen Methode zur Potentialberechnung noch die Berechnung der Mittleren-Feld-Potentiale im Rahmen des 3-Flüssigkeiten-Modells implementiert.

5.2.2 Das 3-Flüssigkeiten-Modell

Wie im letzten Abschnitt bereits angesprochen wurde, soll nun das 3-Flüssigkeiten-Modell vorgestellt werden, das als Erweiterung der lokalen Thomas-Fermi Näherung zur Berechnung der Einteilchen-Potentiale der Baryonen zu sehen ist. Hier geht man im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie nicht mehr von einer einzigen Fermikugel aus, deren Mittelpunkt im LRF immer bei verschwindendem Impuls $p = 0$ liegt. Vielmehr ist im LRF die Besetzung von drei Fermikugeln möglich:

1. Eine Fermikugel mit Mittelpunkt $\vec{p}_{LRF} = \vec{0}$ mit einem Fermiimpuls p^F_{LRF}.
2. Eine Fermikugel mit dem Projektilimpuls im LRF $\vec{p}_{Projektil}$ mit einem Fermiimpuls $p^F_{Projektil}$.
3. Eine Fermikugel mit dem Targetimpuls im LRF $\vec{p}_{Target}$ mit einem Fermiimpuls p^F_{Target}.

Zur Berechnung des impulsabhängigen Anteils des Einteilchen-Potentials (5.6) am Ort $\vec{r}$ werden alle Teilchen, die sich in der entsprechenden Ortsraumgitterzelle (s.o) befinden, einer der drei Fermikugeln zugeordnet. Dazu wird für jedes Teilchen i mit dem Impuls $\vec{p}_i$ im LRF der Abstand

$$dist_{FK} = \sqrt{(\vec{p}_i - \vec{p}_{FK})^2} \qquad (5.11)$$
$$\text{mit FK} = \text{LRF, Projektil, Target,}$$

von den Zentren der drei Fermikugeln berechnet. Die Zuordnung erfolgt dann zu der Fermikugel FK, zu der der Abstand $dist_{FK}$ am kleinsten ist. Nun wird für jede der drei

Fermikugeln FK die lokale Thomas-Fermi Näherung angewandt. Die Phasenraumdichte der Baryonen am Ort $\vec{r}$ erhält man durch Summation über alle drei Fermikugeln

$$\begin{aligned} f(\vec{r},\vec{p}) &= \frac{4}{(2\pi)^3}\Big(\Theta(p^F_{LRF}-|\vec{p}|)+\Theta(p^F_{Projektil}-|\vec{p}-\vec{p}_{Projektil}|) \\ &+ \Theta(p^F_{Target}-|\vec{p}-\vec{p}_{Target}|)\Big)\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (5.6) ein, so erhält man

$$\sum_{I',S'}\int d^3p'\,\frac{f_{I',S'}(\vec{r},\vec{p'})}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2} = \frac{4}{(2\pi)^3}\sum_{FK}\int d^3p'\,\frac{\Theta(p^F_{FK}(\vec{r})-p')}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p}_{FK}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2}, \tag{5.13}$$

mit FK = LRF, Projektil, Target.
Der impulsabhängige Anteil der Mittleren-Feld-Potentiale ergibt sich somit aus einer Summe über die drei Fermikugeln.
Anhand von Abbildung 5.2 soll das 3-Flüssigkeiten-Modell nun näher erläutert werden. In dieser Abbildung sind Impulsraumverteilungen der Baryonen im LRF zu verschiedenen Stadien einer Schwerionenkollision für eine Zelle im Ortsraum schematisch dargestellt. Der obere Teil der Abbildung zeigt die Anfangsphase einer Reaktion im Bereich räumlichen Überlapps von Target und Projektil. Obwohl Target und Projektil bereits im Ortsraum überlappen, haben noch keine Nukleon-Nukleon-Kollisionen stattgefunden. Dies entspricht im Impulsraum zwei getrennten Fermikugeln für Projektil und Target, die - falls die Einschußenergie größer als die Summe beider Fermiimpulse $p^F Projektil + p^F_{Target}$ ist - nicht überlappen. Die Zentren beider Fermikugeln befinden sich beim Target- bzw. Projektilimpuls. Kommt es zu Baryon-Baryon-Kollisionen in der Reaktionszone der Schwerionenkollision, so werden die Fermikugel von Target und Projektil entleert. Im 3-Flüssigkeiten-Modell wird angenommen, daß Baryonen, die aus beiden Fermikugeln herausgestreut werden, in die dritte Fermikugel um p_{LRF} gestreut werden (Abbildung 5.2 Mitte). Dies stellt eine Näherung dar, da die Baryonen nach der Streuung prinzipiell den gesamten Impulsraum zwischen p_{Target} und $p_{Projektil}$ abdecken können. Diese Näherung ist jedoch physikalisch korrekt, da die Kernmaterie innerhalb der Reaktionszone äquilibriert. Dies bedeutet, daß die Fermikugeln von Target und Projektil im Überlappbereich allmählich entvölkert werden und sich die Fermikugel um p_{LRF} füllt. Dies ist im unteren Teil von Abbildung 5.2 dargestellt. Dieser Teil der Abbildung stellt aber auch gleichzeitig den Impulsraum in der Anfangsphase einer Schwerionenkollision dar: Bevor es im Ortsraum zum Überlapp von Target und Projektil kommt, liegt sowohl im Bereich des Targets als auch im Gebiet des Projektils im Impulsraum jeweils eine Fermikugel um p_{LRF} mit den Fermiimpulsen p^F_{Target} und $p^F_{Projektil}$ vor. Gleiches gilt für den Teil des Ortsraums, an dem sich die Spektatoren befinden.

5.3 Initialisierung

Zu Beginn der Simulation einer Schwerionenkollision im CBUU-Modell werden zwei Kerne im Orts- und Impulsraum initialisiert. Dabei wird angenommen, daß der Verlauf

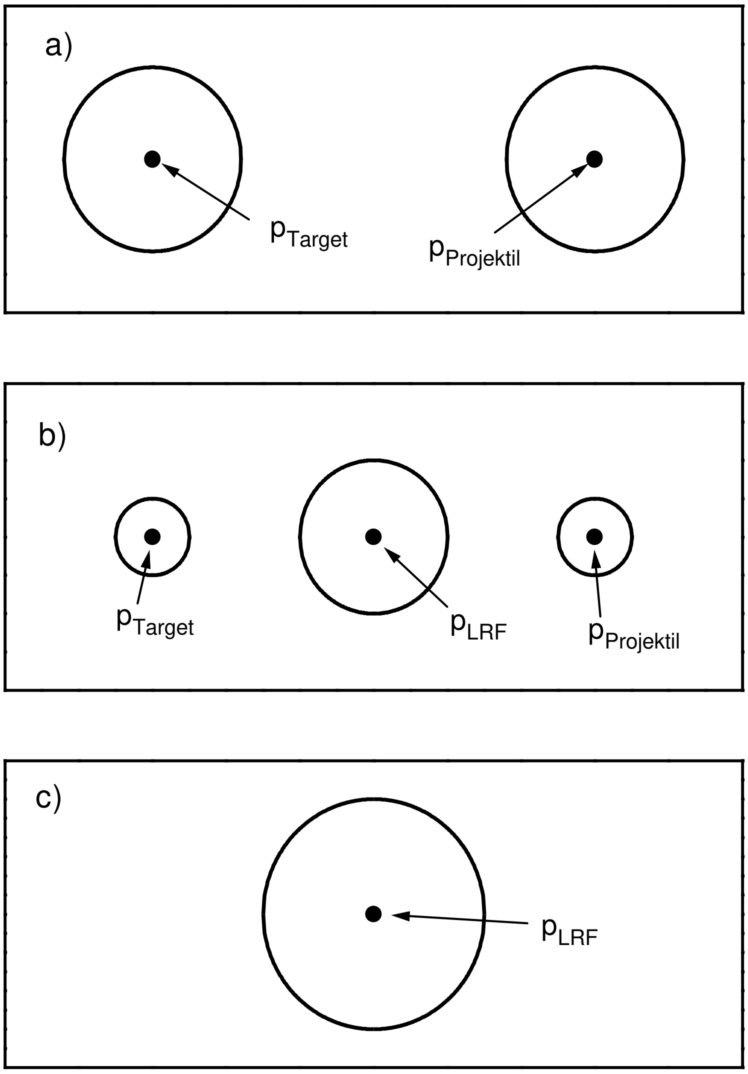

Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der Impulsverteilung der Baryonen zu verschiedenen Stadien einer Schwerionenkollision an ausgewählten Punkten im Ortsraum. Oben: Beide Kerne überlappen bereits im Ortsraum, aber es haben noch keine Baryon-Baryon-Kollisionen stattgefunden. Im Impulsraum sind zwei separierte Fermikugeln zentriert um den Projektil- p_{Target} bzw. den Targetimpuls $p_{Projektil}$ mit den Fermiimpulsen p^F_{Target} und $p^F_{Projektil}$ vorhanden. Mitte: In der Reaktionszone haben bereits Baryon-Baryon-Kollisionen stattgefunden. Dadurch wurden die Fermikugel von Target und Projektil teilweise entleert und in den Bereich zwischen Projektil- und Targetimpuls gestreut. Unten: An einer Stelle im Ortsraum liegt nur eine Fermikugel vor. Dies ist der Fall a) zu Beginn einer Schwerionenreaktion, wenn Target und Projektil räumlich voneinander getrennt sind, b) in den Spektatoren nicht zentraler Reaktionen, c) in der Reaktionszone, wenn die Kernmaterie äquilibriert ist und d) an Stellen im Ortsraum, an denen z. B. 'squeeze-out' stattfindet und dort lokal die gesamte Kernmaterie in eine Richtung strömt.

der Protonen- und Neutronendichte identisch ist. Die anfängliche Verteilung der Testteilchen im Ortsraum erfolgt entsprechend einer radialsymmetrischen Fermi-Verteilung für die Baryonendichte im Ruhesystem des entsprechenden Kernes,

$$\rho(r) = \frac{\rho_{r=0}}{\left[1 + e^{\frac{r-r_0}{\alpha}}\right]}. \tag{5.14}$$

$\rho_{r=0}$ gibt hier die Dichte im Innern des Kernes an und α stellt die Oberflächendicke des Kernes dar. Bei $r = r_0$ sinkt die Dichte auf die Hälfte des Wertes im Kerninneren ab. Für die Parameter r_0 (Kernradius) und α (Oberflächendicke) werden Werte aus Hartree-Fock Rechnungen für stabile Kerne [71] verwendet. Nach diesen Rechnungen liegt α für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Kernen im Bereich von 0.46 und 0.475. Die resultierenden Werte für r_0 sind im oberen Teil von Abbildung 5.3 für verschiedene Kerne als Funktion ihrer Massenzahl A aufgetragen. Aus den beiden Parametern α und r_0 erhält man zusammen mit der Normierungsbedingung,

$$A = 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2\, \rho(r), \tag{5.15}$$

die Werte für die Baryonendichte im Innern des Kernes. $\rho_{r=0}$ ist im unteren Teil von Abbildung 5.3 für ausgewählte Kerne dargestellt. Man sieht daß, $\rho_{r=0}$ mit zunehmender Massenzahl von $\approx 0.18\ 1/fm^3$ auf $\approx 0.152\ 1/fm^3$ abfällt.

Im Impulsraum verteilt man, ausgehend von der lokalen Thomas-Fermi Näherung (s. Abschnitt 5.2.1), die Impulse der Testteilchen homogen in einer Fermikugel, deren Radius der lokale Fermiimpuls $p^F(\vec{r})$ (5.8) ist. (5.8)

5.4 Lösen der Vlasov-Gleichung

In diesem Abschnitt werden zunächst die aus der Vlasov-Gleichung folgenden Bewegungsgleichungen der Testteilchen angegeben, anschließend wird der im CBUU-Modell verwendete numerische Algorithmus zur Lösung dieser Bewegungsgleichungen vorgestellt und erste numerische Ergebnisse präsentiert.

5.4.1 Die Bewegungsgleichungen der Testteilchen

Durch Einsetzen des Ansatzes (5.1) für die Phasenraumdichte $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ in die Vlasov-Gleichung (2.14) erkennt man, daß diese gelöst wird, falls die Testteilchen den klassischen Hamilton-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \end{aligned} \tag{5.16}$$

genügen. Mit $H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^*(\vec{r}, \vec{p}, t)^2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= -\frac{m_i^*}{E_i}\, \vec{\nabla}_r\, U_s(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t) \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \frac{\vec{p}_i}{E_i} + \frac{m_i^*}{E_i}\, \vec{\nabla}_p\, U_s(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t). \end{aligned} \tag{5.17}$$

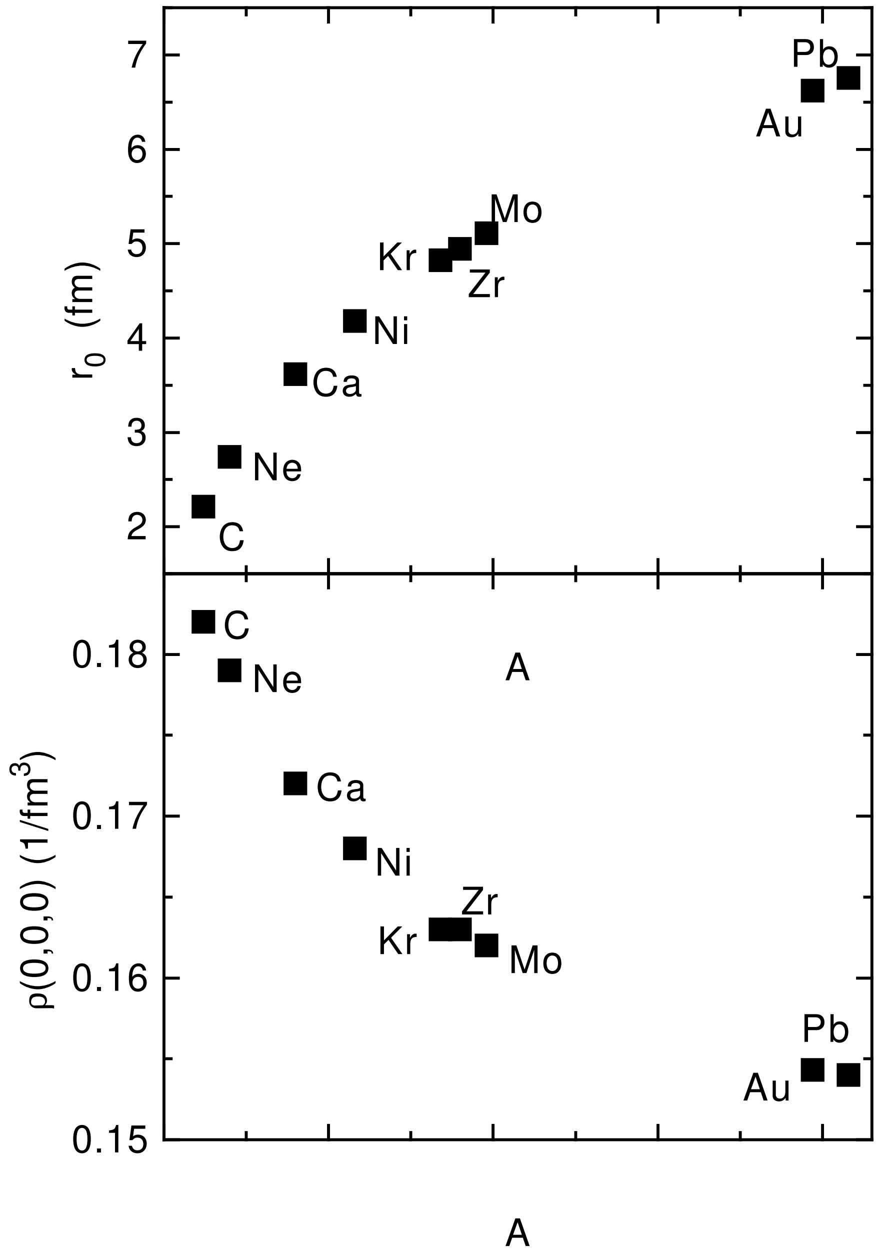

Abbildung 5.3: Oben: Verschiedene Kernradien r_0 aus Hartree-Fock Rechnungen für stabile Kerne [71] als Funktion der Massenzahl. Unten: Die resultierende Baryonendichte im Kerninneren $\rho_{r=0}$ als Funktion der Massenzahl.

Das Lösen der Vlasov-Gleichung entspricht also der Propagation von Testteilchen in einem Mittleren-Feld-Potential, das sich aus der Mittelung über die Testteilchen aller N Ensembles ergibt. Die Kollisionen zwischen den Testteilchen erfolgen im CBUU-Modell hingegen nur innerhalb eines Ensembles. Diese Vorgehensweise zur Lösung der Transportgleichungen (2.21) wird 'Parallel Ensemble'-Methode genannt.

5.4.2 Propagation der Testteilchen

Zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen der Testteilchen wird eine *Prädiktor-Korrektor-Methode* [72] verwendet. Bei diesem Verfahren handelt es sich um ein Zweischrittverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Im ersten Schritt wird mit einem Einschrittverfahren der Fehlerordnung 1 ein sogenannter Prädiktorwert bestimmt, der dann in einem zweiten Schritt korrigiert wird. Die dann erhaltene Lösung hat eine Fehlerordnung von 2. Angewandt auf die Bewegungsgleichungen der Testteilchen für Ort und Impuls (5.16) hat das Prädiktor-Korrektor-Verfahren die folgende Gestalt:
Zur Zeit t befinde sich das Testteilchen i mit dem Impuls $\vec{p}_i$ am Ort $\vec{r}_i$. Der Prädiktor-Schritt lautet dann

$$\vec{p}_i^P = \vec{p}_i - \Delta t \frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{r}_i}, \tag{5.18}$$

$$\vec{r}_i^P = \vec{r}_i + \Delta t \frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{p}_i}, \tag{5.19}$$

wobei Δt die Zeitschrittweite der Simulationsrechnung darstellt. Der Prädiktor-Schritt wird für alle Testteilchen durchgeführt. Anschließend wird mit dieser Testteilchenverteilung der Baryonenviererstrom $j^\mu(\vec{r})$ berechnet und, falls zur Bestimmung der Einteilchen-Potentiale die 3-Flüssigkeiten-Methode (s. Abschnitt 5.2.2) verwendet wird, die Verteilung der Testteilchen auf die 3 Fermikugeln aktualisiert. Der anschließende Korrektor-Schritt liefert die Orte und Impulse der Testteilchen für den nächsten Zeitschritt

$$\vec{p}_i^K = \vec{p}_i - 0.5 * \Delta t \left(\frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{r}_i} + \frac{\partial H(\vec{r}_i^P, \vec{p}_i^P)}{\partial \vec{r}_i^P} \right) \tag{5.20}$$

$$\vec{r}_i^K = \vec{r}_i + 0.5 * \Delta t \left(\frac{\partial H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{p}_i} + \frac{\partial H(\vec{r}_i^P, \vec{p}_i^P)}{\partial \vec{p}_i^P} \right). \tag{5.21}$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichungen der Testteilchen benötigt man die Ableitung der Einteilchenenergien der Testteilchen nach deren Orts- und Impulskoordinaten. Die Ableitungen nach den räumlichen Koordinaten werden auf dem in Abschnitt 5.1.1 eingeführten Ortsraumgitter berechnet. Dazu wird ein Testteilchen, das sich mit dem Impuls $\vec{p}_i$ am Ort $\vec{r}_i$ bewegt dem am nächsten liegenden Gitterpunkt $\vec{r}_{k,l,m} = (k\Delta_r, l\Delta_r, m\Delta_r)$ zugeordnet, wobei Δ_r (= 1 fm) der Abstand der Gitterpunkte ist. Auf den sechs nächsten Nachbarpunkten $\vec{r}_{k\pm1,l\pm1,m\pm1}$ werden die entsprechenden Einteilchenenergien

$$E_{k\pm1,l\pm1,m\pm1} = \sqrt{\vec{p}_i^2 + (m_i + U_s(\vec{r}_{k\pm1,l\pm1,m\pm1}, \vec{p}))^2}$$

berechnet und dann mittels eines Differenzenquotienten die Ableitungen nach den Ortskoordinaten berechnet. Die Ableitungen nach den Impulskoordinaten der Testteilchen werden analog auf einem Impulsgitter mit einem Gitterabstand Δ_p von 10 MeV/c berechnet. Die Bestimmung der Einteilchenenergien erfolgt iterativ, da die Energien in dem Inertialsystem vorliegen müssen, in dem die Simulationsrechnung durchgeführt wird, und die Mittleren-Feld-Potentiale im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie berechnet werden.

5.4.3 Stabilität

Zu Beginn einer Schwerionenkollision bewegen sich zwei Kerne gleichförmig aufeinander zu. Im Rahmen einer Simulationsrechnung werden zwei Kerne in einem Abstand R_{in} von einander initialisiert (s. Abschnitt 5.3) und anschließend entsprechend der Einschußenergie der Reaktion in das Schwerpunktsystem der Reaktion oder in das Laborsystem transformiert. Wären die Kerne numerisch nicht stabil, so würden sie in der Annäherungsphase 'zerfließen' und das Ergebnis der Simulationsrechnung wäre sensitiv auf den Abstand der beiden Kerne zu Beginn der Rechnung. Somit ist die numerische Stabilität sowohl der ruhenden als auch der sich gleichförmig bewegenden Kerne eine wichtige Voraussetzung.
Diese numerische Stabilität soll im folgenden demonstriert werden. Dazu sind in Abbildung 5.4 die Dichteprofile eines ruhenden Ca-Kernes (oben) und eines ruhenden Au-Kernes (unten) als Funktion des Ortest r für verschiedene Zeiten dargestellt. Exemplarisch wurde hier die MMD Parametrisierung (s. Tabelle (3.1)) für die Einteilchen-Potentiale der Nukleonen verwendet. Es wurden 1000 Testeilchen pro Nukleon für die Ca-Rechnung und 200 Testeilchen pro Nukleon für die Au-Rechnung verwendet. Für beide Kerne erkennt man, daß sie ausgehend von der initialisierten Dichte bei $t = 0$ fm/c Schwingungen ausführen. Für beide Kerne bewegen sich diese Dichtefluktuationen im Bereich von 0.15 - 0.2 fm^{-3}. Wichtig ist auch, daß die Kerne räumlich lokalisiert bleiben, was einen Test für die Güte der verwendeten Potentialparametrisierungen, der Initialisierung und der numerischen Testteilchenpropagation darstellt.
In Abbildung 5.5 werden analog die Dichteprofile sich gleichförmig bewegender Ca- (oben) und Au-Kerne (unten) als Funktion des Ortes zu verschiedenen Zeiten dargestellt. Die Darstellung in der linken Spalte entspricht kinetischen Energien von 0.4 AGeV und die rechte Spalte enthält Ergebnisse für Kerne, die sich mit kinetischen Energien von 1.0 AGeV bewegen. Diese Werte entsprechen den Geschwindigkeiten $\beta = 0.71$ bzw. $\beta = 0.88$. Aufgrund der relativistischen Längenkontraktion erhält man im Vergleich zu Abbildung 5.4 verkürzte Kerne mit höheren Nukleonendichten. Man erkennt, daß die sich gleichförmig bewegenden Kerne während des hier dargestellten Zeitintervalls von 30 fm/c stabil bleiben. Die Schwingungen der Kerne bewegen sich prozentual im gleichen Bereich wie die der in Abbildung 5.4 dargestellten ruhenden Kerne.

5.5 Das Coulomb-Potential

Elektrisch geladene Baryonen und Mesonen fühlen das von allen geladenen Teilchen generierte Coulomb-Potential $V_c(\vec{r})$. Da die Mesonen im CBUU-Modell bezüglich des nuklearen Mittleren-Feldes als freie Teilchen propagiert werden, stellt die Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_c(\vec{r}) = -q\,\vec{\nabla}_r V_c(\vec{r}) \tag{5.22}$$

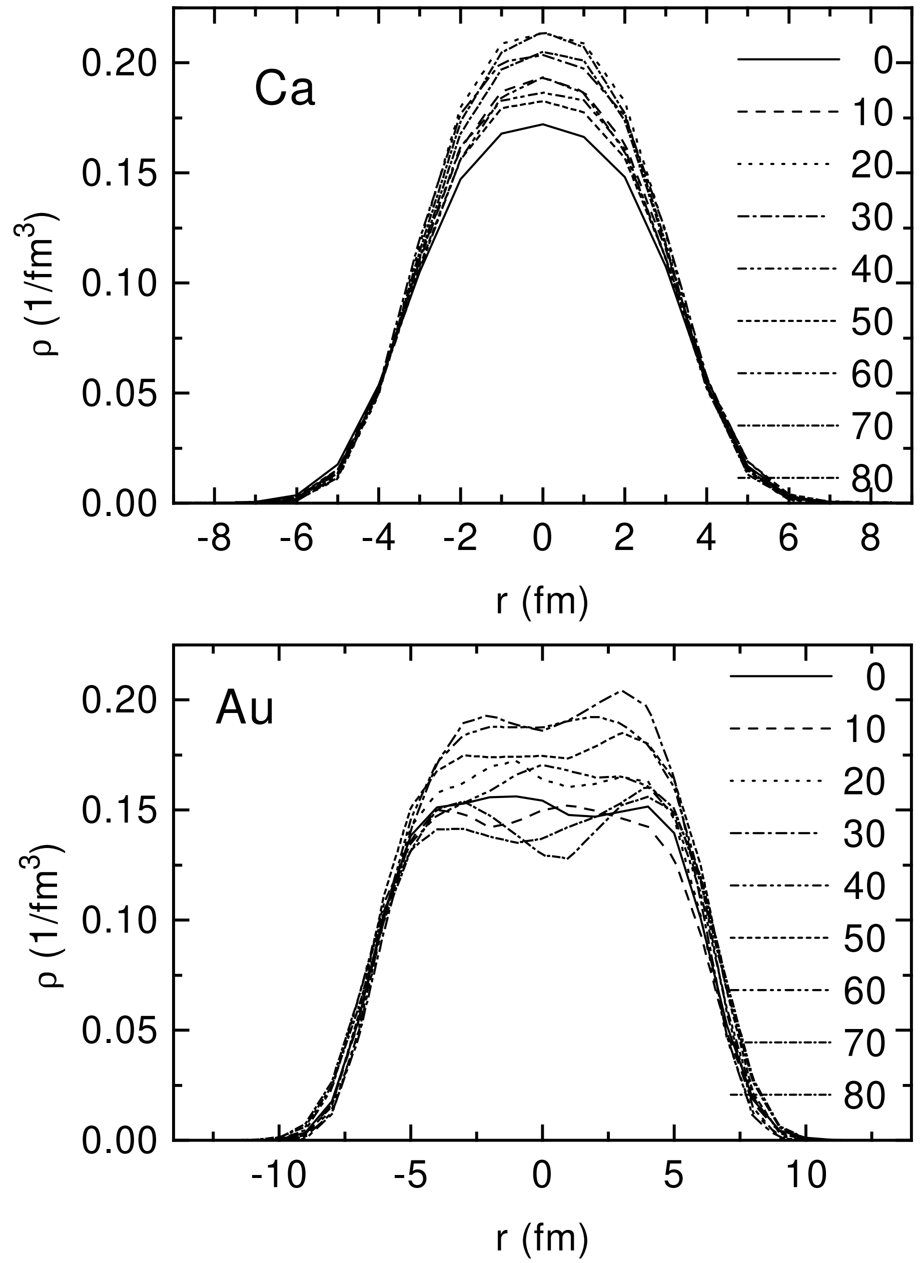

Abbildung 5.4: Dichteprofile eines ruhenden Ca-Kernes (oben) und eines ruhenden Au-Kernes (unten) als Funktion des Ortes für verschiedene Zeiten in fm/c.

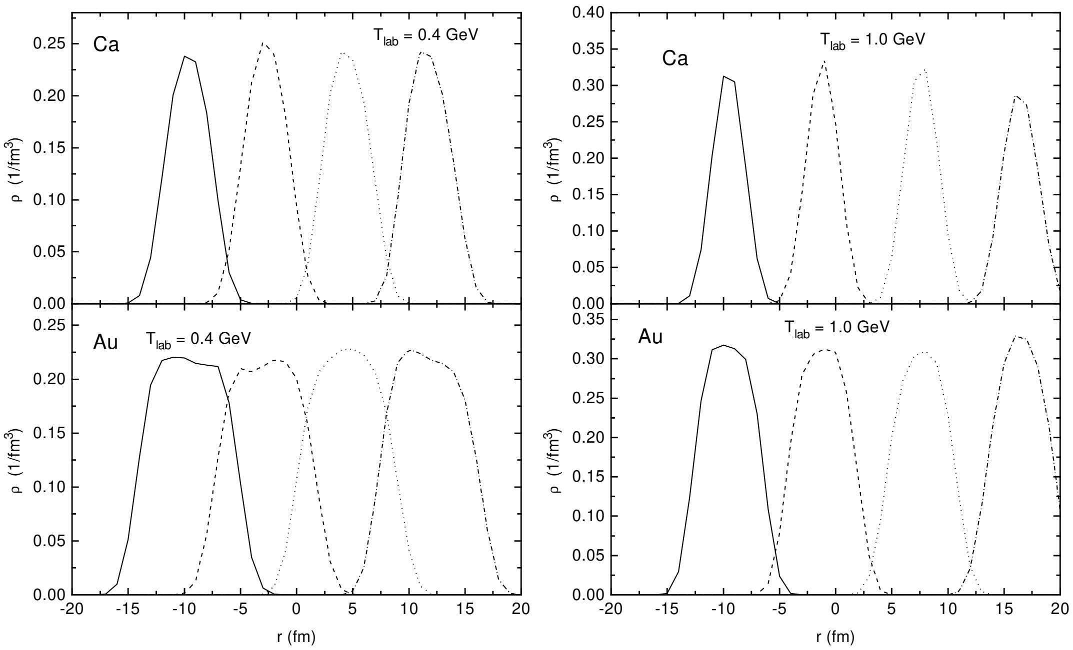

Abbildung 5.5: Dichteprofile eines sich gleichförmig bewegenden Ca-Kernes (oben) und eines Au-Kernes (unten) als Funktion des Ortes für $t = 0\ fm/c$ (duchgezogene Linien), $t = 10\ fm/c$ (gestrichelte Linien), $t = 20\ fm/c$ (gepunktete Linien) und $t = 30\ fm/c$ (strich-punktierte Linien) für kinetische Energien von 0.4 AGeV (linke Spalte) und $1.0 AGeV$ (rechte Spalte).

die einzige Kraft dar, die auf ein Meson mit der Ladung q wirkt. Für geladene Baryonen führt die Coulomb-Kraft F_c (5.22) zu einem zusätzlichen Term in den Bewegungsgleichungen für die Testteilchen (5.16) und (5.17). In numerischen Studien hat sich gezeigt, daß die durch das Magnetfeld induzierten Lorentz-Kräfte im Rahmen der statistischen Unsicherheiten keinen Einfluß auf Pionen- und Protonenspektren haben.
Das Coulomb-Potential $V_c(\vec{r})$ wird in jedem Zeitschritt der Simulationsrechnung aus der aktuellen Ladungsdichte $\rho_c(\vec{r})$ durch Lösen der stationären Poisson-Gleichung mit Hilfe des *Alternating-Direction Implicit Iterative* (ADI-)Algorithmus [73] bestimmt. Eine detaillierte Diskussion der numerischen Bestimmung des Coulomb-Potentials befindet sich in Anhang B.

5.6 Das Kollisionsintegral

Die in den CBUU-Gleichungen auftretenden Kollisionsintegrale enthalten entweder Teilchen-Teilchen- (Baryon-Baryon-, Baryon-Meson- oder Meson-Meson-) Kollisionen oder sie beschreiben den Zerfall von baryonischen oder mesonischen Resonanzen. Im folgenden wird beschrieben, wie diese Kollisionsintegrale numerisch realisiert werden.

5.6.1 Teilchen-Teilchen-Kollisionen

Im Rahmen der Testteilchenmethode ergibt sich die Lösung der Kollisionsintegrale als die Summe aller möglichen Testteilchenkollisionen. Da, wie schon in Abschnitt 5.1 angesprochen, im CBUU-Modell die Parallel-Ensemble Methode verwendet wird, sind Stöße nur zwischen Testteilchen desselben Ensembles erlaubt. Somit können die Testteilchen bezüglich der Kollisionen als physikalische Teilchen (Nukleonen, Baryonenresonanzen, Mesonen) aufgefaßt werden.
Kollisionen zweier Testteilchen zum Zeitpunkt t sind möglich, falls ihr Abstand b im Ortsraum kleiner als ein Maximalabstand b_{max} ist und falls ihre Trajektorien unter der Annahme einer geradlinigen Propagation der Testteilchen im aktuellen Zeitschritt den geringsten Abstand voneinander aufweisen. Die Berechnung des Abstandes b der Testteilchen und der Zeitpunkt der größten Annäherung werden mit Hilfe eines Algorithmus von Kodama et al. [74] relativistisch korrekt berechnet. Eine Beschreibung dieses Algorithmus befindet sich in Anhang A. Der Maximalabstand b_{max} ergibt sich aus einer geometrischen Interpretation des Wirkungsquerschnittes

$$b_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\pi}}, \tag{5.23}$$

wobei σ_{max} der maximal mögliche Wirkungsquerschnitt für die entsprechende Reaktion ist. Dieser maximale Wirkungsquerschnitt beträgt für Nukleon-Nukleon-Kollisionen 55 mb, für Kollisionen zwischen Nukleonen und baryonischen Resonanzen und Δ-Δ-Kollisionen 80 mb, für π-Nukleon-Kollisionen 200 mb und für η-Nukleon-Kollisionen 60 mb. Diese Werte korrespondieren - sofern vorhanden - zu den experimentell bestimmten maximalen Wirkungsquerschnitten der entsprechenden Reaktion. Sind beide oben genannten Kriterien erfüllt, so kann eine Reaktion stattfinden.
Anschließend werden die totalen Wirkungsquerschnitte $\sigma_i(\sqrt{s})$ $(i = 1, \cdots, n)$ aller n möglichen Endzustände als Funktion der invarianten Energie der Reaktion berechnet. Die Quotienten

$$P_i = \frac{\sigma_i(\sqrt{s})}{\sigma_{max}} \tag{5.24}$$

mit $i = 1, \cdots, n$ geben die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Endzustände an. Die Wahrscheinlichkeit P_0, daß keine Reaktion stattfindet, ist durch

$$P_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} P_i \tag{5.25}$$

gegeben. Mit einer Monte Carlo Methode wird festgestellt welcher der n Endzustände angenommen wird bzw. ob keine Reaktion stattfindet $(i = 0)$. Die Kinematik der Teilchen im Endzustand i $(i = 1, \cdots, n)$ wird im Schwerpunktsystem der beiden kollidierenden Teilchen entsprechend den winkeldifferentiellen Wirkungsquerschnitten (s. Kapitel 4) bestimmt. Zum Schluß wird überprüft, ob der gewählte Endzustand i vom Pauli-Prinzip (Abschnitt 5.6.3) erlaubt ist. Ist dies der Fall, so wird die Reaktion akzeptiert. Ist der Endzustand jedoch Pauli-geblockt, so wird die Reaktion verworfen.

5.6.2 Zerfall von Resonanzen

Der Zerfall sowohl von baryonischen Resonanzen als auch von mesonischen Resonanzen (ρ, σ) wird durch deren massenabhängige Breite $\Gamma(M)$ (s. Kapitel 4.2) bestimmt. Im freien Raum zerfällt eine Resonanz nur auf Grund dieser Breite $\Gamma(M)$. Resonanzen, die im Verlauf einer Schwerionenkollision entstehen, sind von nuklearem Medium umgeben. Dieses Medium modifiziert die Zerfallsbreite der baryonischen Resonanzen auf zwei Arten: a.) Die baryonische Resonanz R kann im Stoß mit einem Nukleon N absorbiert werden ($NR \rightarrow NN$), was zu einer Erhöhung der Zerfallsbreite führt. b.) Der Zerfall kann Pauli-geblockt sein. Die numerische Behandlung von a.) wurde im vorhergehenden Abschnitt aufgezeigt und die Behandlung des Pauli-Blockings wird im nächsten Abschnitt erläutert.
Alle Resonanzen können entsprechend ihrer Partialbreiten (s. Kapitel 4.2) in einen 2-Teilchen-Endzustand zerfallen. Zur Ermittlung der Zerfallswahrscheinlichkeit P einer Resonanz wird ein exponentielles Zerfallsgesetz angenommen. Damit ergibt sich folgender Ausdruck für P,

$$P = 1 - e^{-\Gamma(M)/(\hbar\gamma)\Delta t}, \tag{5.26}$$

wobei Δt die Zeitschrittweite der Simulationsrechnung ist. Die Multiplikation mit $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ erfolgt, da die Zerfallswahrscheinlichkeit im Ruhesystem der Resonanz berechnet wird. Mittels eines Monte Carlo Algorithmus wird dann anhand der Zerfallswahrscheinlichkeit P entschieden, ob ein Zerfall der entsprechenden Resonanz stattfindet. Um den Endzustand festzulegen, werden die partiellen Wahrscheinlichkeiten für den Zerfall in die möglichen Zustände i ($i = 1, \cdots, n$) definiert:

$$P_i = \frac{\Gamma_i(M)}{\Gamma(M)}, \tag{5.27}$$

wobei die Γ_i die Partialbreiten (s. Kapitel 4.2) für die möglichen Endzustände darstellen. Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten P_i auf 1 normiert ist, kann der Endzustand mit Hilfe einer Zufallszahl leicht ermittelt werden. Der Zerfall der Resonanz wird verworfen, falls der ermittelte Endzustand Pauli-geblockt ist.

5.6.3 Das Pauli-Blocking

Zur vollständigen Auswertung des Kollisionsintegrals (2.20) muß neben der Berechnung der Wirkungsquerschnitte und Übergangsraten der Elementarprozesse überprüft werden, ob die Endzustände dieser Prozesse unbesetzt oder Pauli-geblockt sind, d.h. ob die Reaktionen ablaufen können oder aufgrund des Pauli-blockings verboten sind. Dies wird im Kollisionsintegral (2.20) durch die Faktoren $(1 - f(\vec{r}, \vec{p}, t))$ zum Ausdruck gebracht. In diesem Abschnitt wird erläutert, wie im CBUU-Modell das Pauli-Blocking numerisch behandelt wird.
Um festzustellen, ob zur Zeit t am Ort $\vec{r}$ der Phasenraum für ein Nukleon mit Impuls $\vec{p}$ Pauli-geblockt ist, wird im Ortsraum ein Würfel der Kantenlänge $a = 3\ fm$ mit Mittelpunkt $\vec{r}$ und im Impulsraum eine Kugel mit Radius $p_0 = 89\ MeV/c = 0.452\ fm^{-1}$ und Mittelpunkt $\vec{p}$ betrachtet. Dies entspricht einem Phasenraumvolumen von

$$\Delta V_{Ph} = \Delta V_r \, \Delta V_p = a^3 \, \frac{4\pi}{3} p_0^3 = 10.3. \tag{5.28}$$

Dieses Phasenraumvolumen ΔV_{Ph} ist im Fall spin- und isospingesättigter Kernmaterie vollständig besetzt, falls es mit $\approx 1/6$ Nukleonen gefüllt ist

$$N_{max} = \frac{4\Delta V_{Ph}}{(2\pi)^3} \approx \frac{1}{6}, \tag{5.29}$$

wobei sich der Faktor 4 aus Spin- und Isospinentartung ergibt.
Im Rahmen der Testteilchenmethode (s. Abschnitt 5.1) ergibt sich für die Phasenraumdichte $f(\vec{r},\vec{p},t)$ damit der folgende Ausdruck

$$f(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{6}{N}\sum_{i=1}^{A(t)N} \Theta(p_0 - |\vec{p}-\vec{p}_i|) \int_{\Delta V_{Ph}} d^3r' \frac{1}{(2\pi\Delta)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)^2}{2\Delta^2}}. \tag{5.30}$$

N und $A(t)$ geben hier wieder die Zahl der Testteilchen pro Nukleon bzw. die zum Zeitpunkt t in der Simulationsrechnung vorhandenen Nukleonen an. Zur Phasenraumdichte $f(\vec{r},\vec{p},t)$ tragen also alle Testteilchen bei, deren Impuls $\vec{p_i}$ innerhalb der oben erwähnten Impulskugel ΔV_p liegt und deren Gauß-Gewichte (zur Definition der Gauß-Gewichte s. Abschnitt 5.1.1) innerhalb des Ortsraumvolumens ΔV_r nicht verschwindende Werte annehmen. In Abbildung 5.6 ist die auf diese Art ermittelte Phasenraumdichte als Funktion des Impulses p eines Nukleons, das sich im Mittelpunkt des jeweiligen Kernes aufhält, im Vergleich zur aus der lokalen Thomas-Fermi Näherung erhaltenen Phasenraumdichte dargestellt. Während der obere Teil der Abbildung das Resultat für einen Ca-Kern für verschiedene N beinhaltet, ist im unteren Teil das Ergebnis für einen Au-Kern dargestellt. Man erkennt, daß die statistischen Schwankungen in der Phasenraumdichte für die üblicherweise in Simulationsrechnungen verwendeten Testteilchenzahlen hinreichend klein sind. Bei kleinen Testteilchenzahlen ($N = 50, 100$) ergeben sich jedoch erhebliche Schwankungen. Im Vergleich zur analytischen Phasenraumdichte ist die numerisch berechnete im Impulsraum ausgeschmiert, was eine Folge des verwendeten Impulsraumvolumens ΔV_p ist. Hieran erkennt man auch die Notwendigkeit, zur numerischen Berechnung der Phasenraumdichte ein recht großes Ortsraumvolumenelement ΔV_r von 27 fm^3 verwenden zu müssen. Verkleinerte man dieses, so ergäbe sich aus dem resultierenden größeren Impulsraumelement eine größere Verschmierung der Phasenraumdichte im Impulsraum. Dies führte dann zu einer Herabsetzung der Güte des numerischen Pauli-Blockings.

Die Entscheidung, ob eine Reaktion (z. B. $NN \to NN$) ablaufen kann oder Pauli-geblockt ist, geschieht mit Hilfe eines Monte Carlo Algorithmus. Dazu wird für jedes Nukleon im Endzustand der Reaktion die Phasenraumdichte $f(\vec{r},\vec{p},t)$ entsprechend Gleichung (5.30) ermittelt. Anschließend wird sichergestellt, daß der Wert der numerisch berechneten Phasenraumdichte maximal den Wert 1 - was der vollständigen Besetzung des Phasenraums an der Stelle $\vec{r}$, $\vec{p}$ entspricht - annehmen kann

$$f_{Pauli}(\vec{r},\vec{p},t) = min(1.0, f(\vec{r},\vec{p},t)). \tag{5.31}$$

Falls eine dann ermittelte Zufallszahl kleiner als $f_{Pauli}(\vec{r},\vec{p},t)$ ist, wird der Endzustand des entsprechenden Teilchens als besetzt angenommen und die Reaktion kann nicht ablaufen. Andernfalls ist die Reaktion erlaubt, sofern der Endzustand eines weitern Nukleons, das in derselben Reaktion entsteht, nicht Pauli-geblockt ist.

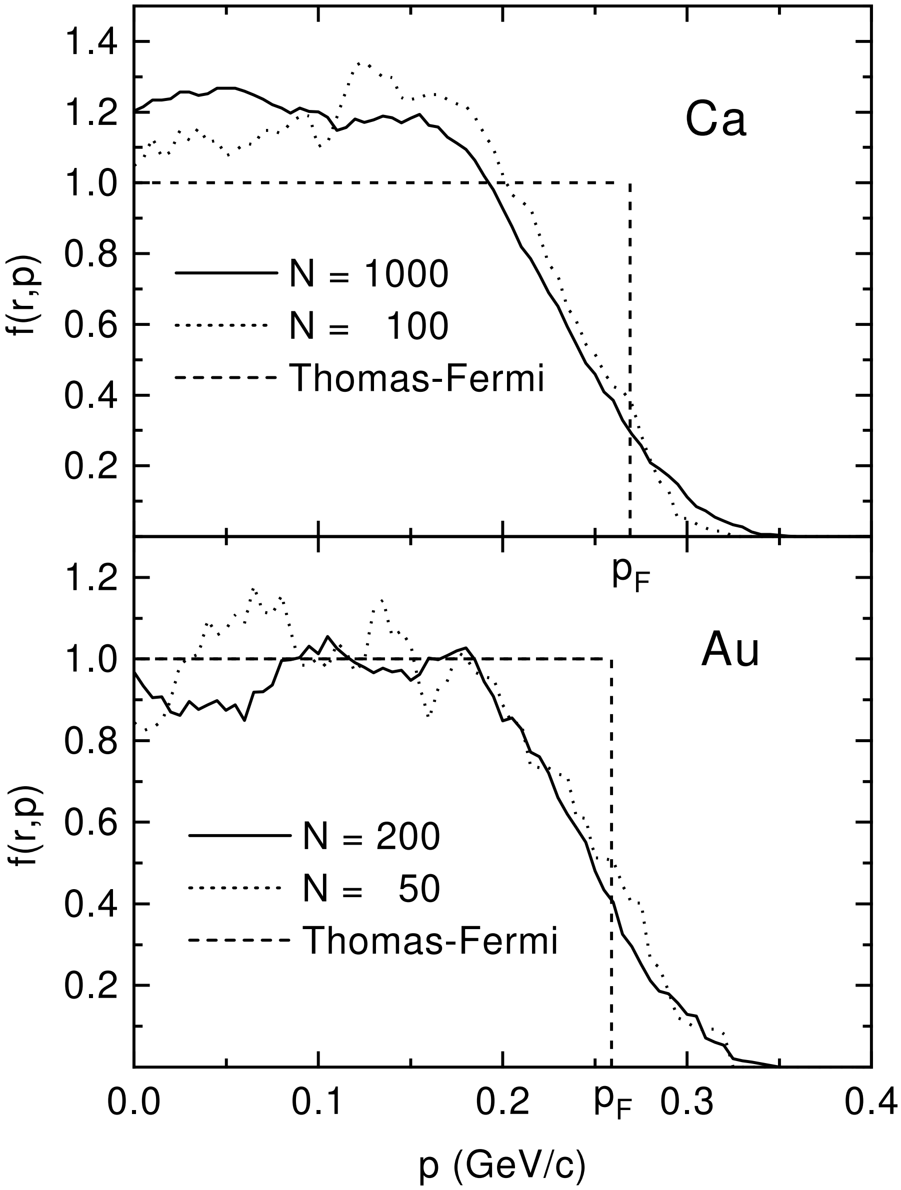

Abbildung 5.6: Die numerisch ermittelte Phasenraumdichte als Funktion des Impulses für Nukleonen, die sich im Zentrum des jeweiligen Kernes aufhalten im Vergleich zur aus der lokalen Thomas-Fermi Näherung erhaltenen Phasenraumdichte (gestrichelte Linien). Oben: Für Ca-Kern mit $N = 1000$ (durchgezogene Linie) bzw. $N = 100$ (gepunktete Linie) Testteilchen pro Nukleon. Unten: Für einen Au-Kern mit $N = 200$ (durchgezogene Linie) bzw. $N = 50$ (gepunktete Linie) Testteilchen pro Nukleon.

5.7 Energieerhaltung

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels soll die numerische Genauigkeit der Energieerhaltung im CBUU-Modell untersucht werden. Ausgehend von den in Kapitel 3.1.2 vorgestellten potentiellen Energiedichten (3.22) und (3.24) wird ein Ausdruck für die Gesamtenergie formuliert, der nur noch die Einteilchen-Potentiale $U(\vec{r},\vec{p})$ enthält.
Mit diesem Ausdruck für die Gesamtenergie wird dann die Energieerhaltung im CBUU-Modell numerisch überprüft.

5.7.1 Das Energiefunktional

Die Energie eines Systems wechselwirkender Teilchen ergibt sich aus der Summe eines Integrals über die Einteilchen-Energiedichte $e(\vec{r})$ und des Integrals über die potentielle Energiedichte $V(\rho)$

$$E = \int e(\vec{r})\, d^3r + \int V(\rho(\vec{r}))\, d^3r. \tag{5.32}$$

Die Energiedichte $e(\vec{r})$ zur Zeit t erhält man, indem man die Einteilchenenergie multipliziert mit der Phasenraumdichte über die räumlichen Komponenten des Impulses integriert,

$$e(\vec{r}) \equiv \sum_{I,S} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} f_{I,S}(\vec{r},\vec{p},t)\, d^3p.$$

Liegen nur Zweiteilchenwechselwirkungen vor, so ist Gleichung (5.32) äquivalent zu

$$E = \int e(\vec{r})\, d^3r + \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) U_b(\vec{r})\, d^3r, \tag{5.33}$$

wobei $U_b(\vec{r})$ das Einteilchen-Potential am Ort $\vec{r}$ darstellt. Der Index b (englisch 'bare') soll ausdrücken, daß das Einteilchen-Potential aus einer Zweiteilchenwechselwirkung hervorgegangen ist. Ein Beispiel für eine solche Wechselwirkung ist die Coulomb-Wechselwirkung. Auch der zu ρ^2 proportionale Anteil der Skyrme-Wechselwirkung (3.22) fällt in diese Kategorie. Der impulsabhängige Anteil der Wechselwirkung (3.24) stellt ebenfalls eine Zweiteilchenwechselwirkung dar. Will man hier die potentielle Energiedichte durch die Einteilchen-Potentiale ausdrücken, so muß jedoch anstelle der Integration $d\rho = \rho(\vec{r})d^3r$ eine Summation über die Spin- und Isospinfreiheitsgrade und eine Phasenraumintegration $df = (2\pi)^{-3} f(\vec{r},\vec{p},t) d^3r d^3p$ eingeführt werden,

$$\int V(\rho(\vec{r}))\, d^3r = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{I,S} \int \int f_{I,S}(\vec{r},\vec{p},t) U_b(\vec{r},\vec{p})\, d^3p\, d^3r. \tag{5.34}$$

Im folgenden soll die Diskussion auf die Skyrme-Wechselwirkung bzw. auf den lokalen Anteil der impulsabhängigen Wechselwirkung beschränkt werden, da diese Terme nicht proportional zu ρ^2 sind und somit die Formulierung der Gesamtenergie in Abhängigkeit von den Einteilchen-Potentialen erschweren.

Allgemein erhält man das Einteilchen-Potential aus der Variation der potentiellen Energiedichte nach der Baryonendichte (s. Kapitel 3). Für die Skyrme-Wechselwirkung geht diese Variation äquivalent zu einer partiellen Ableitung nach der Dichte

$$U(\rho) = \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}. \tag{5.35}$$

Um die Energie als Funktion der Einteilchen-Potentiale angeben zu können, wird eine dichteabhängige effektive Vertexfunktion $v(\rho)$ eingeführt. Mit dieser Vertexfunktion wird die potentielle Energiedichte (3.22) so umgeschrieben, daß sie formal proportional zu ρ^2 ist,

$$V(\rho) \equiv \frac{1}{2}\rho^2 v(\rho). \tag{5.36}$$

Durch Vergleich mit $V(\rho)$ erhält man

$$v(\rho) = A\frac{1}{\rho_0} + \frac{2B}{\tau+1}\frac{\rho^{\tau-1}}{\rho_0^\tau}. \tag{5.37}$$

Das Einteilchen-Potential $U(\rho)$ resultiert aus der Variation nach ρ,

$$\begin{aligned} U(\rho) &= \rho v(\rho) + \frac{1}{2}\rho^2 \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} && (5.38)\\ &\equiv U_b(\rho) + U_r(\rho). && (5.39) \end{aligned}$$

Der erste Term der Gleichung (5.38) ergibt sich aus der Ableitung von ρ^2 und entspricht somit dem weiter oben eingeführten Potential U_b. Der zweite Term U_r ergibt sich aus der Variation der Vertexfunktion $v(\rho)$. In diesem Term wird also die Dichteabhängigkeit der effektiven Wechselwirkung berücksichtigt. Anschaulich beschreibt dieser Term die Rückkopplung des Teilchens, für welches das Einteilchen-Potential berechnet wird, auf die das Potential erzeugende Konfiguration. Das Potential U_r wird aus diesem Grund in der Literatur als 'rearangement'-Potential bezeichnet [53, 75, 76, 77]. In der Sprache der Feynman-Diagramme ergibt sich U_r aus der Berücksichtigung von Diagrammen höherer Ordnung mit mindestens vier Vertizes.
Für die Skyrme-Wechselwirkung erhält man

$$\begin{aligned} U_b(\rho) &= A\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{2B}{\tau+1}\frac{\rho^\tau}{\rho_0^\tau} && (5.40)\\ U_r(\rho) &= B\frac{\tau-1}{\tau+1}\frac{\rho^\tau}{\rho_0^\tau}. && (5.41) \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} E &= \int e(\vec{r})\, d^3r + \int V(\rho)\, d^3r && (5.42)\\ &= \int e(\vec{r})\, d^3r + \frac{1}{2}\int \rho\, U_b(\rho)\, d^3r && (5.43)\\ &= \int e^*(\vec{r})\, d^3r - \frac{1}{2}\int \rho\, U_b(\rho)\, d^3r - \int \rho\, U_r(\rho)\, d^3r, && (5.44) \end{aligned}$$

wobei $e(\vec{r})$ die weiter oben eingeführte Energiedichte für freie Teilchen darstellt. $e^*(\vec{r})$ ist die Energiedichte der Quasiteilchen mit der Energie $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + U(\rho)$ mit

$$e^*(\vec{r}) \equiv \int (\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + U(\rho)) f(\vec{r}, \vec{p}, t)\, d^3p. \tag{5.45}$$

Gleichung (5.44) ist der gesuchte Ausdruck für die Gesamtenergie, der nur noch von Einteilcheneigenschaften abhängt. Bei Verwendung der impulsabhängigen Wechselwirkung (3.24) ergibt sich die Gesamtenergie, indem man das Skyrme-Einteilchen-Potential $U(\rho)$ durch das entsprechende impulsabhängige Einteilchen-Potential (3.25) ersetzt und auf der rechten Seite von Gleichung (5.44) in dem Term, der U_b enthält, die impulsabhängigen Anteile (5.34) berücksichtigt.

5.7.2 Energieberechnung im Rahmen der Testteilchenmethode

Mit Hilfe der Gleichung (5.44) läßt sich nun die Berechnung der Gesamtenergie im Rahmen der Testteilchenmethode bestimmen. Dazu wird der Ausdruck (5.44) in jeder Gitterzelle des Ortsraumgitters (s. Abschnitt 5.1.1) berechnet und anschließend über alle Gitterzellen summiert. Die Berechnung des Energieinhaltes einer Gitterzelle $\vec{r}_k$ erfolgt in deren lokalem Ruhesystem als Summe über alle Testteilchen in dieser Gitterzelle

$$E(\vec{r_k}) = \frac{1}{N} \sum_{i:\vec{r_i} \epsilon V_k} \left(\sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2} + U(\vec{r}_i, \vec{p}_i) - \frac{1}{2} U_b(\vec{r}_i, \vec{p}_i) - U_r(\vec{r}_i, \vec{p}_i) \right). \tag{5.46}$$

Die Definition von V_k befindet sich in Abschnitt 5.1.1. Bei $U(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$, $U_b(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ und $U_r(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ handelt es sich um das gesamte Einteilchen-Potential, dem Anteil des Einteilchen-Potentials proportional zu ρ^2 und um das 'rearangement'-Potential des Testteilchens i. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.3 wird im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie aus dem nicht-relativistischen Einteilchen-Potential das skalare Potential, bzw. die effektive Masse eines Testteilchens, bestimmt und man erhält

$$E(\vec{r_k}) = \frac{1}{N} \sum_{i:\vec{r_i} \epsilon V_k} \left(\sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^{*2}} - \frac{1}{2} U_b(\vec{r}_i, \vec{p}_i) - U_r(\vec{r}_i, \vec{p}_i) \right). \tag{5.47}$$

Der Gesamtimpuls einer Ortsraumzelle $\vec{p}_k$ ergibt sich analog aus der Summe über die Impulse der Testteilchen in dieser Zelle. Der Beitrag der Zelle $\vec{r}_k$ zur Gesamtenergie im Inertialsystem, in dem die Simulationsrechnung durchgeführt wird, ergibt sich durch eine Lorentz-Transformation in dieses System.

5.7.3 Energieerhaltung in Mittleren-Feld-Rechnungen

Unter Verwendung des soeben beschriebenen Verfahrens wird nun die Energieerhaltung in Mittleren-Feld-Rechnungen überprüft. Sofern nicht anders angegeben, wurden alle folgenden Rechnungen mit dem Parametersatz MMD (s. Tabelle 3.1) durchgeführt. In Abbildung 5.7 sind die Bindungsenergien (E/A) für einen Ca- (durchgezogene Linie) und einen Au-Kern (gestrichelte Linie) als Funktion der Zeit dargestellt. Für beide

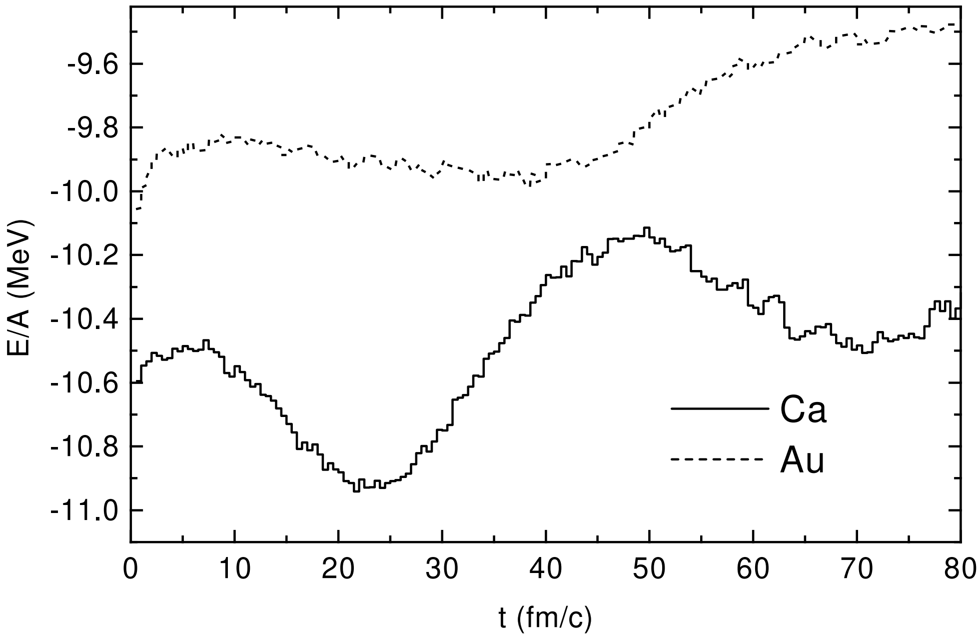

Abbildung 5.7: Bindungsenergien E/A für einen Ca- (durchgezogene Linie) und einen Au-Kern (gestrichelte Linie) als Funktion der Zeit.

Kerne ergeben sich Schwankungen in der Bindungsenergie pro Nukleon im Bereich von 0.4 MeV um einen mittleren Wert von -10.6 MeV im Fall des Ca-Kernes und um -9.8 MeV im Fall des Au-Kernes. Diese Werte liegen etwa 2 MeV über den experimentell bestimmten Bindungsenergien. Eine Verbesserung der Grundzustandseigenschaften durch die Berücksichtigung von Oberflächen- und Asymmetrieenergie im CBUU-Modell ist geplant [78].

Auch die Energieerhaltung für sich gleichförmig bewegende Kerne ist zufriedenstellend, wie man aus Abbildung 5.8 erkennt. In dieser Abbildung wird die Energie pro Nukleon abzüglich der Ruhemasse als Funktion der Zeit für einen Ca- (durchgezogene Linie) und einen Au-Kern (gestrichelte Linie) mit einer kinetischen Energie von 0.4 AGeV dargestellt. Hier stellt man ebenfalls Abweichungen im Bereich von 0.2 MeV vom Startwert ($t = 0$) fest.

Nach der Überprüfung der Energieerhaltung für ruhende und sich gleichförmig bewegende Kerne, soll nun das Verhalten für Mittlere-Feld-Rechnungen von kollidierenden Kernen untersucht werden. Dazu sind in Abbildung 5.9 die Energien pro Teilchen als Funktion der Zeit für eine $Ca + Ca$- (oben), eine $Zr + Zr$- (Mitte) und eine $Au + Au$-Kollision (unten) bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV dargestellt. Die durchgezogenen Linien korrespondieren zu Rechnungen mit der Skyrme-Parametrisierung S für das Einteilchen-Potential der Baryonen. In den Rechnungen, die durch die gestrichelten Linien repräsentiert werden, wurde das lokale Thomas-Fermi-Modell (s. Abschnitt 5.2.1) zur Berechnung der Einteilchen-Potentiale verwendet und die punktierten Linien wurden im Rahmen des 3-Flüssigkeiten-Modells (s. Abschnitt 5.2.2) erhalten. In allen Rechnungen wird die Energie in der Annäherungsphase der beiden Kerne (0 bis ≈ 5 fm/c) auf dem gleichen Niveau erhalten wie im Fall der sich gleichförmig bewegenden Kerne. Während der Zeit des räumlichen Überlapps der Kerne weicht der Wert von

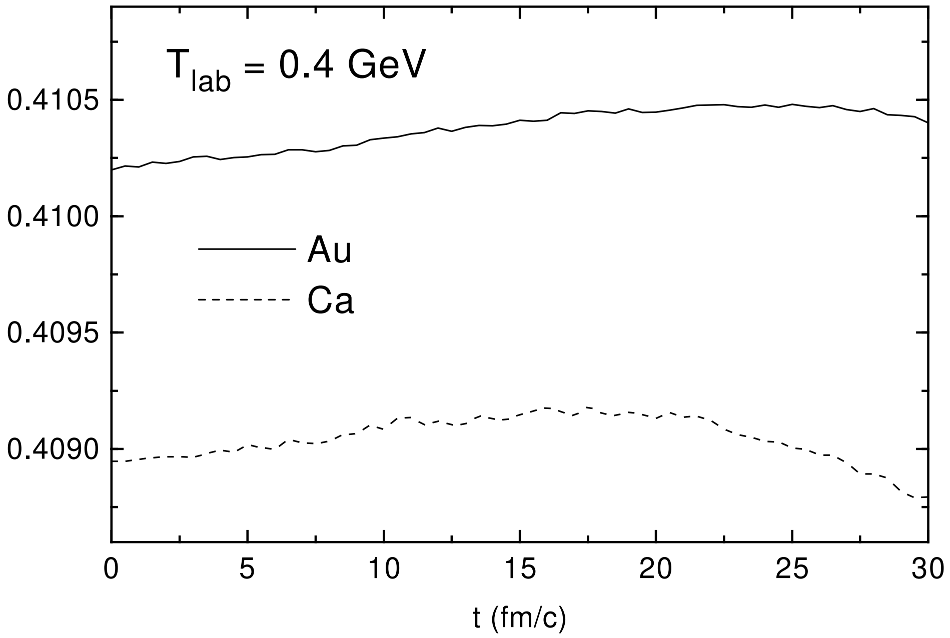

Abbildung 5.8: Die Energie pro Teilchen (abzüglich der Ruhemasse) als Funktion der Zeit für sich mit einer kinetischen Energie von 0.4 AGeV gleichförmig bewegende Ca-(durchgezogene Linie) und Au-Kerne (gestrichelte Linie).

E/A um 1 bis 2.5 % vom Anfangswert ab, um sich diesem dann am Ende der Reaktion wieder anzunähern. Während bei Verwendung der Skyrme-Parametrisierung der Wert am Ende der Reaktion dem Anfangswert entspricht, treten bei Verwendung der explizit impulsabhängigen Einteilchen-Potentiale Abweichungen von circa 0.5 % auf. Dies spiegelt die erhöhte numerische Komplexität, die sich aus der Behandlung der explizit impulsabhängigen Potentiale ergibt, wider.
Die Verletzung der Energieerhaltung in der Phase des räumlichen Überlapps beider Kerne ist hauptsächlich auf folgende numerische Effekte zurückzuführen: Hier kommt es zu einer Überhöhung der Baryonendichte im Reaktionsvolumen, was wiederum zu größeren Gradienten führt und somit zu einer numerisch ungenaueren Berechnung der Einteilchen-Potentiale und damit zu einer Verschlechterung in der Testteilchenpropagation. Der Einfluß der Numerik auf die Energieerhaltung wird deutlich, wenn man die Rechnungen in der lokalen Thomas-Fermi-Näherung mit den Rechnungen unter Verwendung des 3-Flüssigkeiten-Modells für alle drei Systeme vergleicht. Beide Modelle sind sowohl in der Anfangs- als auch in der Endphase der Reaktion identisch, da dort im 3-Flüssigkeiten-Modell nur die Fermi-Kugeln besetzt werden, die zum LRF korrespondieren und sich das 3-Flüssigkeiten-Modell auf die lokale Thomas-Fermi-Näherung reduziert. Die Differenz der Werte von E/A zum Ende der Reaktion nimmt von ≈ 1.2 MeV für das Ca-System auf circa 1 MeV für $Zr + Zr$ und auf circa 0.5 MeV für das Au-System ab. Vom Ca über das Zr hin zum Au nimmt das Reaktionsvolumen zu und entsprechend nehmen die Oberflächeneffekte ab. Dies bedeutet, daß sich im Fall der schweren Systeme mehr Testteilchen in Bereichen mit kleinen Dichtegradienten aufhalten, als dies für leichte Systeme der Fall ist. Diese hat zur Folge, daß die geglättete Dichte (Abschnitt 5.1.1), die zur Potentialberechnung benutzt wird, für schwere Syste-

me weniger von der aktuellen Testteilchenverteilung abweicht und somit für schwere Systeme die Güte der Testteilchenpropagation erhöht wird.

Vergleicht man die Ergebnisse der verwendeten Potentialmodelle für alle drei Massensysteme, so erkennt man, daß die Werte für E/A, die in der lokalen Thomas-Fermi Näherung erhalten wurden, etwa den Ergebnissen folgen, die unter Verwendung der Skyrme-Parametrisierung erzielt wurden. Dies folgt aus der Tatsache, daß zur Berechnung der Einteilchen-Potentiale in beiden Parametrisierungen letzlich nur die Baryonendichte im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie eingeht.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß der verwendete Algorithmus zur Testteilchenpropagation die Gesamtenergie sowohl für ruhende als auch für gleichförmig bewegte Kerne sehr gut erhält. Bei Kollisionen kommt es zu Verletzungen der Energieerhaltung von bis zu 2% der kinetischen Energie pro Teilchen während der Überlapp-Phase der Kerne. Der asymptotische Wert von E/A dagegen weicht nur um circa 0.5% vom Anfangswert ab, was in Anbetracht der numerischen Komplexität ein zufriedenstellendes Ergebnis ist.

5.7.4 Energieerhaltung in 2-Teilchen-Kollisionen

Bei den CBUU-Gleichungen (2.21) handelt es sich um Bewegungsgleichungen für die Einteilchenphasenraumdichten $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$. Demzufolge werden alle Teilchen (Baryonen und Mesonen) als Quasiteilchen, die durch eine effektive Masse m^*, den Impuls $\vec{p}$ und die Energie E charakterisiert werden, behandelt. In einer 2-Teilchen-Kollision bzw. einem Resonanzzerfall muß die Summe der Quasiteilchenenergien und -impulse der Teilchen im Anfangszustand der Reaktion bzw. die Energie und der Impuls der zerfallenden Resonanz erhalten werden. Für eine Kollision zweier Nukleonen N_1 und N_2, in der die Nukleonen N_3 und N_4 erzeugt werden, hat die Energieerhaltung somit folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_3 + E_4 \\ \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^{*2}} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^{*2}} &= \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^{*2}} + \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_4^{*2}}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Für die Impulserhaltung ergibt sich analog

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4. \tag{5.49}$$

Die Auswertung der Kollisionsintegrale (2.20) erfolgt im Schwerpunktsystem der kollidierenden Teilchen bzw. im Ruhesystem der zerfallenden Resonanz. In diesem System gilt für die Impulse der beiden Teilchen im Endzustand der Reaktion

$$\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \equiv \vec{p}. \tag{5.50}$$

Mit $\sqrt{s}$ als der Summe der Quasiteilchenenergien im Anfangszustand der Reaktion, erhält man für den Betrag von $\vec{p}$

$$p = \sqrt{\frac{(s + m_3^{*2} - m_4^{*2})^2}{4s} - m_3^{*2}}. \tag{5.51}$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine Iterationsgleichung für den Betrag des Impulses $\vec{p}$, da die effektiven Massen m_3^* und m_4^* wiederum implizit von diesem Impuls

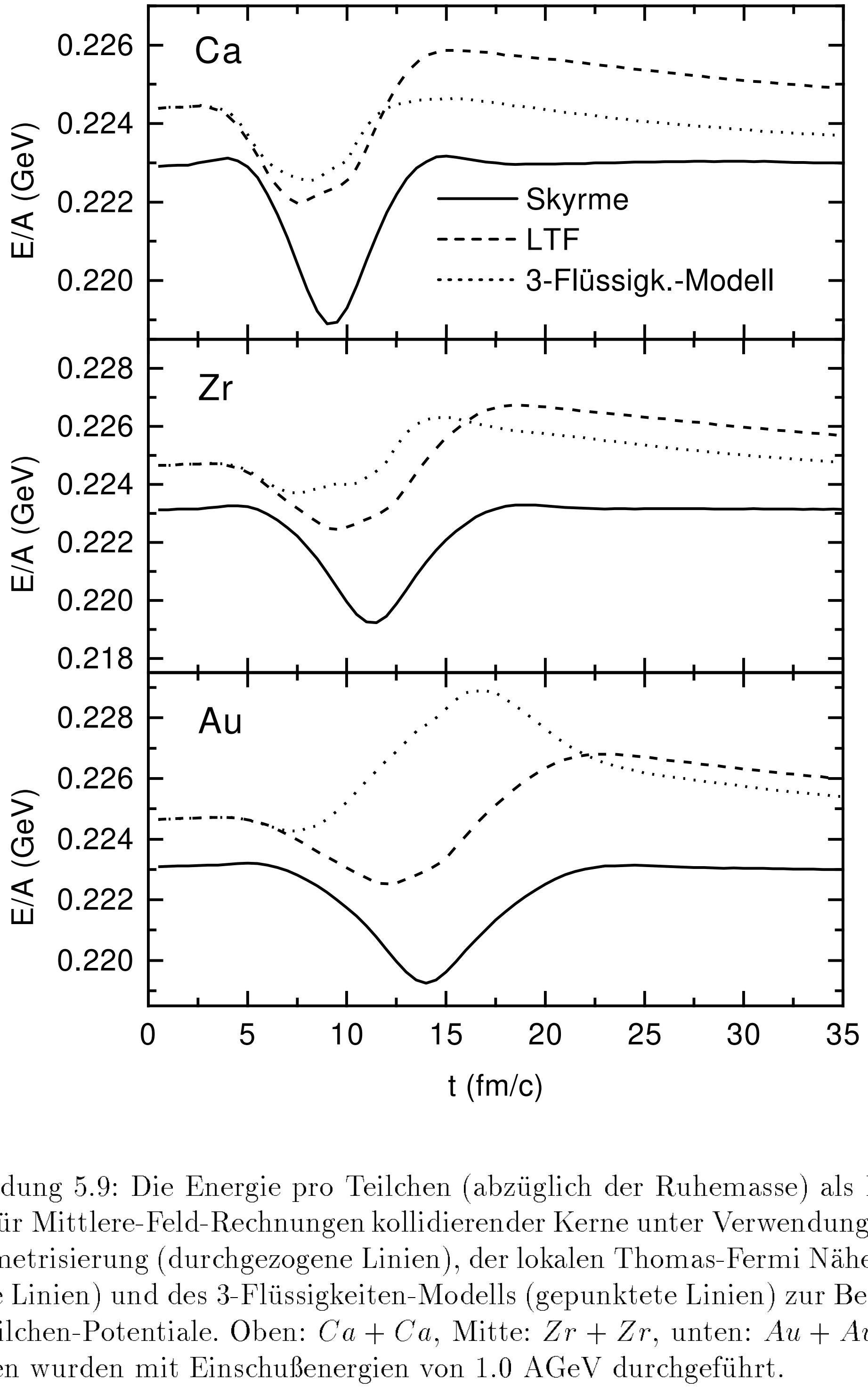

Abbildung 5.9: Die Energie pro Teilchen (abzüglich der Ruhemasse) als Funktion der Zeit für Mittlere-Feld-Rechnungen kollidierender Kerne unter Verwendung der Skyrme-Parametrisierung (durchgezogene Linien), der lokalen Thomas-Fermi Näherung (gestrichelte Linien) und des 3-Flüssigkeiten-Modells (gepunktete Linien) zur Berechnung der Einteilchen-Potentiale. Oben: $Ca + Ca$, Mitte: $Zr + Zr$, unten: $Au + Au$. Alle Rechnungen wurden mit Einschußenergien von 1.0 AGeV durchgeführt.

abhängen. Für die Produktion einer Resonanz in einer 2-Teilchen-Kollision (Meson-Baryon- oder Meson-Meson-Kollision) ergeben sich die Quasiteilchenenergie E_R und die -impulse $\vec{p}_R$ der Resonanz aus der Summe der Energien und Impulse der Teilchen im Anfangszustand der Reaktion. Die effektive Masse m_R^* der Resonanz liegt somit fest über

$$m_R^* = \sqrt{E_R^2 - \vec{p}_R^2}.$$

Die Bestimmung der Ruhemasse m_R erfolgt im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie durch Auflösen von Gleichung (3.44) nach m_R. Das entsprechende skalare Potential der Resonanz resultiert aus der Differenz von Ruhemasse und effektiver Masse.

Im folgenden soll untersucht werden, welche Einflüsse die Quasiteilchennäherung und somit die soeben beschriebene Methode zur Bestimmung der Quasiteilchenenergien und -impulse in 2-Teilchen-Kollisionen und Resonanzzerfällen auf die Erhaltung der Gesamtenergie.

Betrachtet man den Ausdruck (5.47) für die Gesamtenergie, so erkennt man, daß dieser Ausdruck nur im Fall von impulsunabhängigen Einteilchen-Potentialen streng erhalten ist. Denn nur in diesem Fall sind die Potentiale U_b und U_r für alle an einer 2-Teilchen-Kollision beteiligten Teilchen dieselben und die Erhaltung der Quasiteilchenenergien in einer Kollision oder einem Resonanzzerfall ist äquivalent zur Erhaltung der Gesamtenergie (5.47). Bei Verwendung von impulsabhängigen Potentialen sind die Potentiale U_r und U_b für die Teilchen im Anfangszustand und die Teilchen im Endzustand einer Reaktion im allgemeinen nicht identisch, was zur Folge hat, daß der Ausdruck (5.47) nicht streng erhalten ist.

Dies soll anhand von Abbildung 5.10 demonstriert werden. Hier ist die Energie pro Nukleon (abzüglich der Ruhemasse) als Funktion der Zeit für $Ca + Ca$, $Zr + Zr$ und $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV dargestellt. Dabei wurde zur Berechnung der Einteilchen-Potentiale der Baryonen die Skyrme-Parametrisierung (oben), die lokale Thomas-Fermi Näherung (Mitte) und das 3-Flüssigkeiten-Modells (unten) verwendet. Man erkennt, daß bei Verwendung der Skyrme-Parametrisierung der Ausdruck (5.47) für die Gesamtenergie für alle drei Systeme im Rahmen der numerischen Unsicherheiten (s. Diskussion von Abbildung 5.9) auf einem Niveau $\leq 1.0\%$ erhalten ist. Bei Verwendung der explizit impulsabhängigen Potentialparametrisierungen wird der soeben diskutierte Einfluß der 2-Teilchen-Kollisionen deutlich. Während die Gesamtenergie linear mit der Zahl der Nukleonen im System ansteigt, wächst die Anzahl der 2-Teilchen-Kollisionen proportional zum Quadrat der Zahl der Nukleonen. Dies führt dazu, daß die Energie des mittleren Feldes (5.47) am Ende der Rechnung immer weiter vom Ausgangswert abweicht je schwerer das betrachtete System ist. In der lokalen Thomas-Fermi Näherung wächst diese Abweichung von 0.5% im Fall des Ca-Systems auf 1.1% für das Zr-System und auf 2.3% für das Au-System. Das gleiche Verhalten ist im Rahmen des 3-Flüssigkeiten-Modells festzustellen. Hier ergeben sich Abweichungen von 3.1% für Ca, 3.8% für Zr und 4.6% für Au. Die Tatsache, daß für das 3-Flüssigkeiten-Modell größere Abweichungen als für die lokale Thomas-Fermi Näherung auftreten, läßt sich anhand von Abbildung 5.2 anschaulich verstehen. Die meisten 2-Teilchen-Kollisionen finden vor der Äquilibrierung des Feuerballs statt. Die Teilchen im Anfangszustand einer Kollision befinden sich meist in den zu Target und Projektil korrespondierenden Impulskugeln, während die Teilchen im Endzustand einer Reaktion

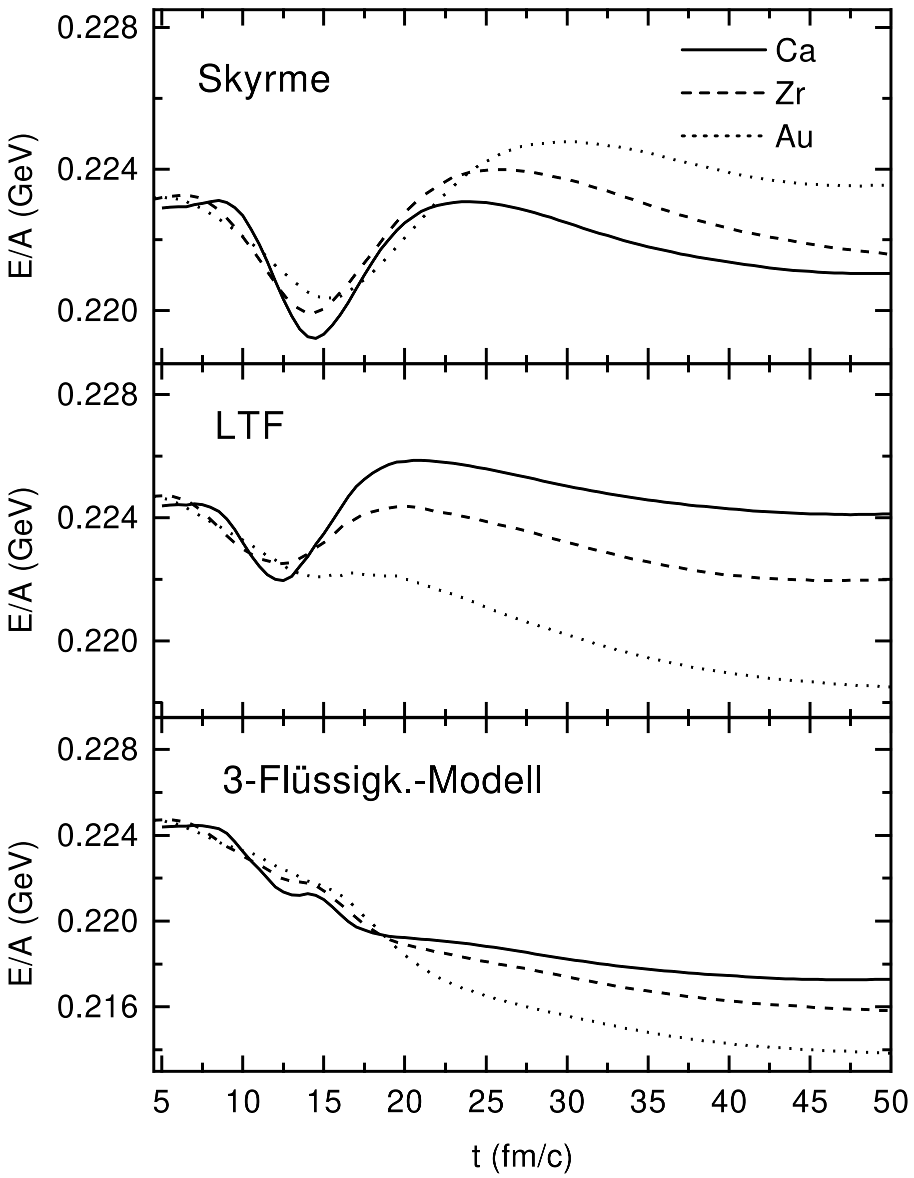

Abbildung 5.10: Energie pro Teilchen (abzüglich der Ruhemasse) als Funktion der Zeit für $Ca + Ca$ (durchgezogene Linien), $Zr + Zr$ (gestrichelte Linien) und $Au + Au$ (gepunktete Linien) bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV und einem Stoßparameter $b = 0$ fm unter Verwendung der Skyrme-Parametrisierung (oben), der lokalen Thomas-Fermi Näherung (Mitte) und des 3-Flüssigkeiten-Modells (unten) zur Berechnung der baryonischen Einteilchen-Potentiale.

sich - im Rahmen des 3-Flüssigkeiten-Modells - in der Impulskugel mit dem Mittelpunkt $\vec{p}_{LRF} = \vec{0}$ befinden. In der lokalen Thomas-Fermi Näherung wird zur Berechnung der Einteilchen-Potentiale davon ausgegangen, daß sich alle Teilchen im LRF in einer Fermikugel um $\vec{p}_{LRF} = \vec{0}$ befinden. Dies bedeutet, daß es im 3-Flüssigkeiten-Modell, verglichen mit der lokalen Thomas-Fermi Näherung, zu größeren Unterschieden in den Potentialen U_b der Teilchen im Anfangszustand und im Endzustand einer 2-Teilchen-Kollision (s. Gleichungen (5.10) und (5.13)) und somit zu größeren Abweichungen in der Energie des mittleren Feldes kommt.
Zur expliziten Quantifizierung dieser Aussagen dienen die Abbildungen 5.11 und 5.12. In Abbildung 5.11 ist die Baryonendichte einer $Au + Au$-Kollision mit einem Stoßparameter von $b = 0$ fm für verschiedene Zeiten dargestellt. Die Abbildung stellt den Dichteverlauf in der x-z-Ebene für $y = 0$ dar. Zur Zeit $t = 0$ fm/c sind die beiden Kerne separiert. Bei circa 5 fm/c kommt es zum räumlichen Überlapp beider Kerne. Anschließend ($t = 10 - 20$ fm/c) kommt es im Zentrum des Reaktionsvolumens zur Ausbildung der Hochdichtephase, wobei Dichten von $\approx 2.5\rho_0$ erreicht werden. Bei $t = 25$ fm/c beginnt die Expansionsphase und der Feuerball dehnt sich gleichmäßig nach allen Seiten aus. Zur Zeit $t = 45$ fm/c ist der Wert der Baryonendichte im Zentrum auf weniger als 5% von ρ_0 abgesunken.
Abbildung 5.12 gibt die relative Besetzungszahl der drei Impulskugeln des 3-Flüssigkeiten-Modells für dieselbe Reaktion als Funktion der räumlichen z-Koordinate für $x = 0$ und $y = 0$ an. Die durchgezogenen Histogramme repräsentieren die relative Anzahl der Baryonen, die sich im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie in der Impulskugel mit Mittelpunkt $\vec{p} = \vec{0}$ befinden. Entsprechend geben die gestrichelten und die gepunkteten Histogramme die relative Zahl der Teilchen an, die sich in den Impulskugeln befinden, deren Mittelpunkte zum Target- bzw. Projektilimpuls korrespondieren. Zur Zeit $t = 0$ fm/c sind beide Kerne räumlich separiert (s. Abbildung 5.11) und alle Teilchen bewegen sich, abgesehen vom jeweiligen Fermiimpuls, gleichmäßig mit Target- bzw. Projektilgeschwindigkeit. Transformiert man Projektil- und Targetimpuls in das jeweilige LRF, so findet man $\vec{p}_{Projektil} = \vec{p}_{Target} = \vec{0}$. Aufgrund der räumlichen Separation der Kerne sind die Fermikugeln, deren Mittelpunkte dem Target- bzw. Projektilimpuls entsprechen, also mit der Fermikugel um $\vec{p} = 0$ im LRF identisch. Dasselbe gilt auch für $t = 5$ fm/c. Hier kommt es gerade zur Berührung beider Kerne. Es ist nicht mehr der Fall sobald sich an einem Ort sowohl Nukleonen aus dem Target als auch Nukleonen aus dem Projektil befinden (s. dazu die Diskussion zur Abbildung 5.2 in Kapitel 5.2.2). Zur Zeit $t = 10$ fm/c, also zu Beginn der Hochdichtephase, befinden sich im Zentrum des Reaktionsvolumens 60% aller Teilchen noch in den zu Target- bzw. Projektil korrespondierenden Impulskugeln. Mit dem Fortschreiten der Reaktion wird diese Verteilung breiter und die relative Zahl der Teilchen, die sich in den Impulskugeln um $\vec{p}_{LRF} = \vec{0}$ befinden, nimmt langsam zu. Am Ende der Hochdichtephase ($t = 20$ fm/c) befinden sich bei $z = 0$ nur noch $\approx 20\%$ der Teilchen in den Target- bzw. Projektilimpulskugeln. Anschließend äquilibriert das System und bis auf einen verschwindend kleinen Bruchteil bewegen sich alle Teilchen entsprechend dem jeweiligen lokalen Ruhesystem der Kernmaterie.
Vergleicht man den in den vorangegangenen Abbildungen dargestellten zeitlichen Verlauf der Baryonendichte sowie den Verlauf der relativen Besetzung der verschiedenen Impulskugeln des 3-Flüssigkeiten-Modells mit dem in Abbildung dargestellten 5.10 zeit-

lichen Verlauf der E/A-Werte für das Au-System (gepunktete Linien), so erkennt man, daß sich in der Hochdichtephase, also in dem Zeitraum, in dem die meisten 2-Teilchen-Kollisionen stattfinden, die größten Abweichungen vom Anfangswert der Energie des mittleren Feldes auftreten. Am Ende der Hochdichtephase flachen die Kurven für alle drei Potentialmodelle ab und nähern sich ihrem asymptotischen Wert. Vergleicht man die Kurven für die lokale Thomas-Fermi Näherung und das 3-Flüssigkeiten-Modell, so stellt man fest, daß diese bis zur Zeit $t \approx 12$ fm/c nahezu identisch sind. Im Zeitraum zwischen $t = 15$ und $t = 20$ fm/c hat die Kurve, die zum 3-Flüssigkeiten-Modell korrespondiert, im Vergleich zur Kurve für das lokale Thomas-Fermi Modell einen steileren Verlauf, bis sie dann bei circa 25 fm/c ebenfalls abflacht und sich dann in der Expansionsphase ihrem asymptotischen Wert nähert. Dies ist gerade der Zeitraum, in dem - im Rahmen des 3-Flüssigkeiten-Modells - die zum Target- und Projektilimpuls korrespondierenden Impulskugeln maximal besetzt sind (s. Abbildung 5.12), und somit die Unterschiede in den Potentialen U_b am größten sind (s. oben). Damit sind die weiter oben gemachten Aussagen zu den Auswirkungen der 2-Teilchen-Kollisionen auf die Erhaltung der im letzten Abschnitt abgeleiteten Energie des mittleren Feldes qualitativ und quantitativ belegt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß durch die 2-Teilchen-Kollisionen die Erhaltung der Energie des mittleren Feldes, wie sie im letzten Abschnitt definiert wurde, verletzt wird. Dies wurde erwartet, da der Ausdruck für die Gesamtenergie (5.47) im Rahmen der mittleren Feld Theorie abgeleitet wurde und und somit keinerlei Korrelationen berücksichtigt wurden. Aus der Tatsache, daß die Erhaltung der Gesamtenergie des mittleren Feldes abzüglich der Ruhemassen nur auf einem Niveau von maximal 4% verletzt wird, kann man schließen, daß die Behandlung der 2-Teilchen-Kollisionen im Quasiteilchenbild eine hinreichend gute Approximation darstellt.

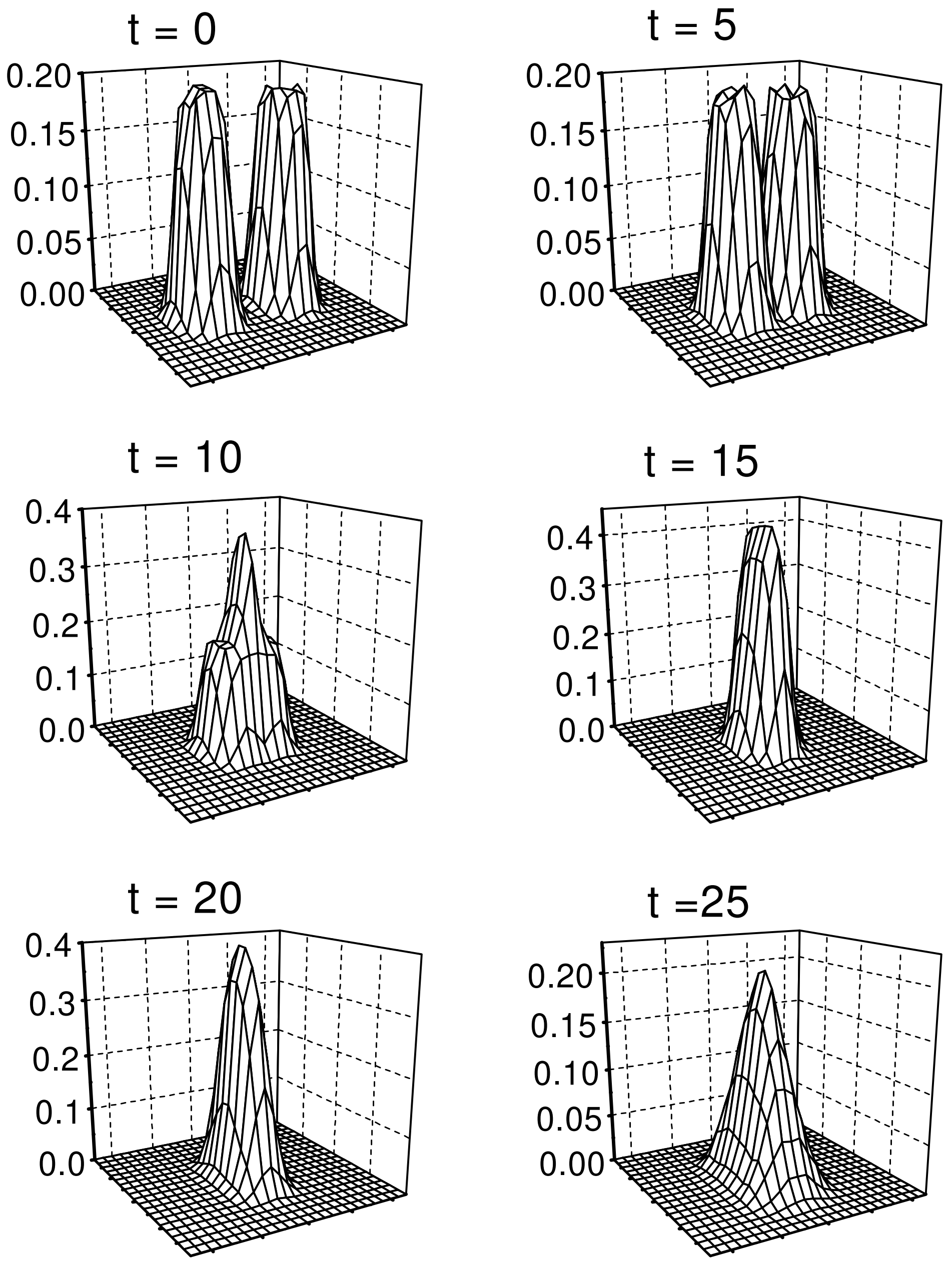

Abbildung 5.11: Die Fortsetzung der Abbildung befindet sich auf der nächsten Seite.

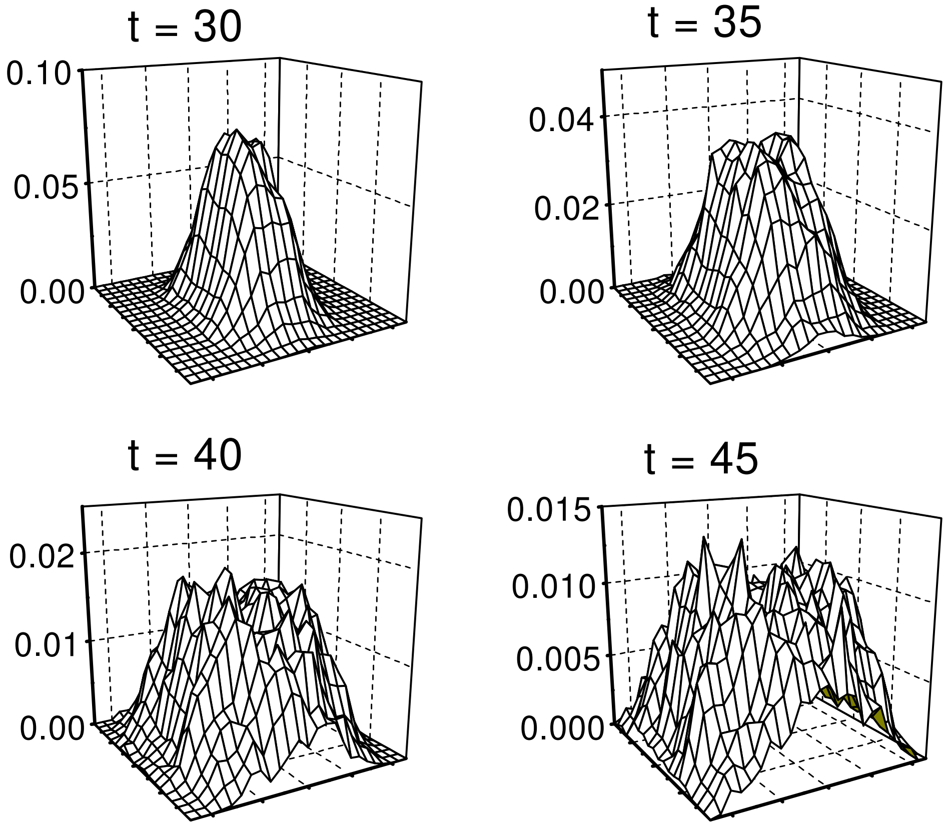

Abbildung 5.11: Baryonendichte ρ einer $Au+Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV mit $b = 0$ fm für verschiedene Zeiten. Die Abbildungen zeigen die Baryonendichten in der x-z-Ebene für y = 0. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde nur die Achse, die die Baryonendichte angibt, beschriftet. Die Achsen an der Basis der Abbildungen entsprechen den räumlichen (z,x) Koordinaten. Die Abstände der Gitterpunkte dieser Achsen sind je 2 fm. Die Zeit ist in Einheiten von fm/c angegeben.

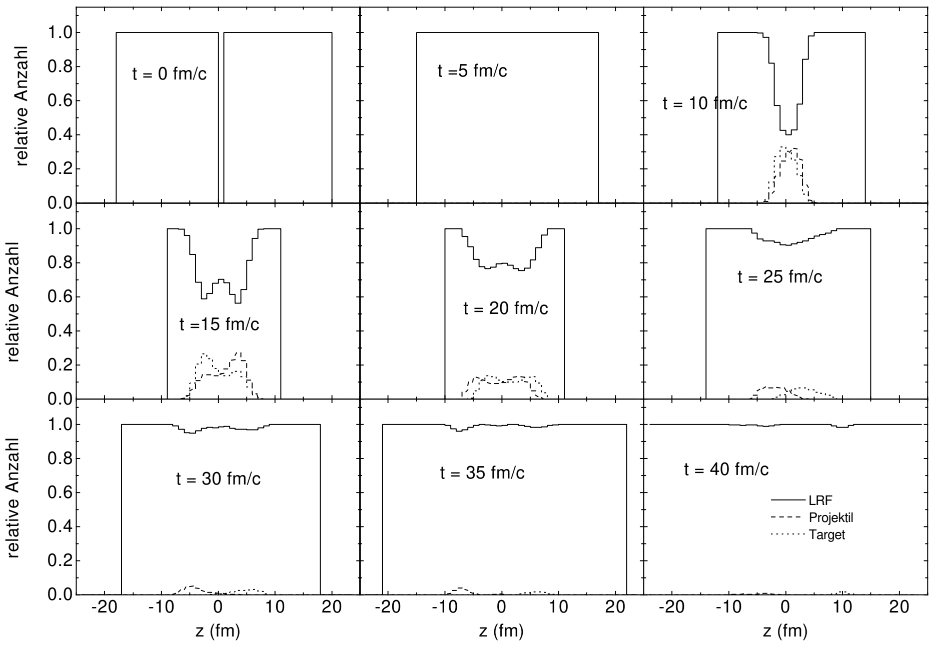

Abbildung 5.12: Relative Besetzungszahl der drei Impulskugeln des 3-Flüssigkeiten-Modells für eine $Au + Au$-Kollision von 1.0 AGeV mit einem Stoßparameter $b = 0$ fm als Funktion der räumlichen z-Koordinate (x = 0, y = 0) für verschiedene Zeiten. Die durchgezogenen Histogramme repräsentieren die relative Anzahl der Teilchen, die sich im lokalen Ruhesystem der Kernmaterie in der Impulskugel mit Mittelpunkt $\vec{p} = \vec{0}$ befinden. Entsprechend geben die gestrichelten und die gepunkteten Histogramme die relative Zahl der Teilchen an, die sich im LRF in den Impulskugeln um den Projektil- bzw. Targetimpuls aufhalten. Es ist zu beachten, daß für den Fall der räumlichen Separation von Target- und Projektilnukleonen die Impulskugeln um Projektil- bzw. Targetimpuls identisch mit der Impulskugel um $\vec{p} = \vec{0}$ im LRF sind (s. Text).

Kapitel 6

Erste numerische Ergebnisse zur Pionenproduktion

6.1 Pionenproduktion und Resonanzdynamik

Abgesehen von der direkten Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen (s. Abschnitt 4.7) stammen Pionen im Rahmen des CBUU-Modells aus dem Zerfall baryonischer Resonanzen wie dem $\Delta(1232)$, dem $N(1440)$ usw. Die Population und der Zerfall der baryonischen Resonanzen spielt demnach eine entscheidende Rolle für die Pionenproduktion. Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt untersucht werden wie die Dynamik der baryonischen Resonanzen von der Einschußenergie, den Target- und Projektilmassen und der Zentralität der Schwerionenkollisionen abhängt.
Dazu werden zunächst zentrale ($b = 0$ fm) $Ca+Ca$- und $Au+Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV und eine $Au+Au$-Reaktion bei einer Einschußenergie von 1.5 AGeV betrachtet. Anhand dieser drei Systeme werden Rückschlüsse auf die Massen- bzw. Energieabhängigkeit der Resonanzpopulation gezogen.
In Abbildung 6.1 ist für die drei genannten Systeme die Zahl der in der Simulationsrechnung vorhandenen $\Delta(1232)$ (durchgezogene Histogramme), die Summe aller höheren baryonischen Resonanzen (außer $\Delta(1232)$, gestrichelte Histogramme), die Zahl der Pionen (gepunktete Histogramme) und die Summe der $\Delta(1232)$, der höheren Resonanzen und der Pionen (strichpunktierte Histogramme) als Funktion der Zeit dargestellt. Die dünnen gepunkteten Linien stellen die Baryonendichte im Ursprung des Schwerpunktsystem der jeweiligen Reaktion dar. Diese Linien geben somit einen Überblick über die Gesamtdynamik der Schwerionenkollisionen. Der zeitliche Verlauf der Resonanzpopulation und der daraus folgenden Pionenproduktion ist für alle drei Systeme qualitativ gleich. Betrachtet man die dünnen gepunktete Linien, die den Dichteverlauf im Zentrum des Reaktionsvolumens angeben, so erkennt man, daß für beide Systeme mit der Einschußenergie von 1.0 AGeV jeweils Maximaldichten von $\approx 2.5\rho_0$ angenommen werden. Wird die Einschußenergie jedoch auf 1.5 AGeV erhöht, so erhöht sich diese Maximaldichte auf circa $3\rho_0$. Daraus kann man den Schluß ziehen, daß die maximale Kompression im wesentlichen von der jeweiligen Einschußenergie bestimmt wird. Die Systemgröße bestimmt hingegen die Lebensdauer des komprimierten Feuerballs: während im System $Au+Au$ bei 1.0 AGeV die Baryonendichte für einen Zeitraum von circa 12 fm/c über einem Wert von $2\rho_0$ liegt, ist im System $Ca+Ca$ bei gleicher

Einschußenergie die baryonische Materie nur für circa 7 fm/c auf mehr als die doppelte Saturationsdichte von Kernmaterie komprimiert.
Auch die Resonanzpopulation verläuft in allen drei Systemen ähnlich. Die Bevölkerung der baryonischen Resonanzen setzt ein, wenn die Baryonendichte im Zentrum der Reaktion auf Werte von $\approx 1.5\rho_0$ angewachsen ist. Die maximale Anzahl der Resonanzen wird unabhängig von der Spezies am Ende der Hochdichtephase angenommen, bevor es dann, entsprechend des exponentiellen Zerfallsgesetzes der Resonanzen, zu einer Abregung kommt. Die Pionenproduktion setzt etwa gleichzeitig mit der Resonanzpopulation ein und steigt dann monoton an, bis die Zahl der Pionen schließlich am Ende der Reaktion ihren asymptotischen Wert (oben: 12.5, Mitte: 55, unten: 97) annimmt und die Pionen als freie Teilchen die Reaktionszone verlassen. Die Zahl der am Ende der Reaktion vorliegenden Pionen wird bereits am Ende der Hochdichtephase bzw. zu Beginn der Expansionsphase festgelegt, wie am Verlauf der Kurve für die Summe aus baryonischen Resonanzen und Pionen zu erkennen ist. Diese Kurven nehmen für alle drei Systeme am Ende der Hochdichtephase ihre Maxima an, bevor sie abfallen und ungefähr bei zentralen Dichten von ρ_0 ihre asymptotischen Werte annehmen. Dies bedeutet zunächst, daß sich ein Gleichgewicht zwischen Resonanzproduktion ($NN \to NR$) und Resonanzabsorption ($NR \to NN$) eingestellt hat. Darüberhinausgehende Analysen zeigen vielmehr, daß diese Reaktionen bereits ausgefroren sind und somit alle sich noch im System befindlichen Resonanzen in Nukleonen und Pionen zerfallen. Auffallend ist weiterhin, daß die gesamte Resonanzdynamik durch das $\Delta(1232)$ dominiert ist. Die Anzahl der höheren Resonanzen beträgt nur circa 10% der Zahl der $\Delta(1232)$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV und circa 20% bei 1.5 AGeV.

Die soeben gemachten Aussagen zur Population der höheren baryonischen Resonanzen werden anhand von Abbildung 6.2 noch deutlicher. Hier ist die Zahl der $\Delta(1232)$ (durchgezogenen Histogramme), die Summe aller höheren Baryonrenesonanzen (gestrichelte Histogramme), die Zahl der $N(1440)$ (gepunktete Histogramme) und die Zahl der $N(1535)$ (strichpunktierte Histogramme) in logarithmischer Darstellung als Funktion der Zeit angegeben. Vergleicht man den oberen und den mittleren Teil der Abbildung, so ist auffällig, daß die Zahl der Resonanzen als Funktion der Zeit für das kleine System viel stärker abnimmt als für das große System. Dies deutet wieder auf die Unterschiede in der Systemgröße hin. Da die Zahl der möglichen 2-Teilchen-Kollisionen proportional zum Quadrat der teilnehmenden Nukleonen ist, kommt es am Ende der Reaktion im schweren $Au + Au$-System noch zu wesentlich mehr Nukleon-Nukleon-Kollisionen, durch die Resonanzen erneut bevölkert werden können. Diese Repopulation der baryonische Resonanzen ist im leichten $Ca + Ca$-System weniger ausgeprägt und es kommt hauptsächlich zum Zerfall der in der Hochdichtephase produzierten Resonanzen. Auffällig ist weiterhin, daß das Maximum der Resonanzpopulation für alle Resonanzarten zur selben Zeit angenommen wird. Vergleicht man den zeitlichen Verlauf der $\Delta(1232)$-Anzahl mit der Anzahl der höheren Resonanzen, die noch im System vorhanden sind, so fällt auf, daß die Zahl der höheren Resonanzen schneller sinkt als die der $\Delta(1232)$. Hier wird wieder der weiter oben beschriebenen Effekt deutlich: Die leichten $\Delta(1232)$ können in der Expansionsphase leichter durch relativ niederenergetische Nukleon-Nukleon-Kollisionen bevölkert werden als die schwereren Baryonenresonanzen. Mit zunehmender Einschußenergie wird mehr und mehr Energie im Feuerball deponiert. Dies zeigt sich aus dem Vergleich der Histogramme, die die Zahl der $N(1440)$

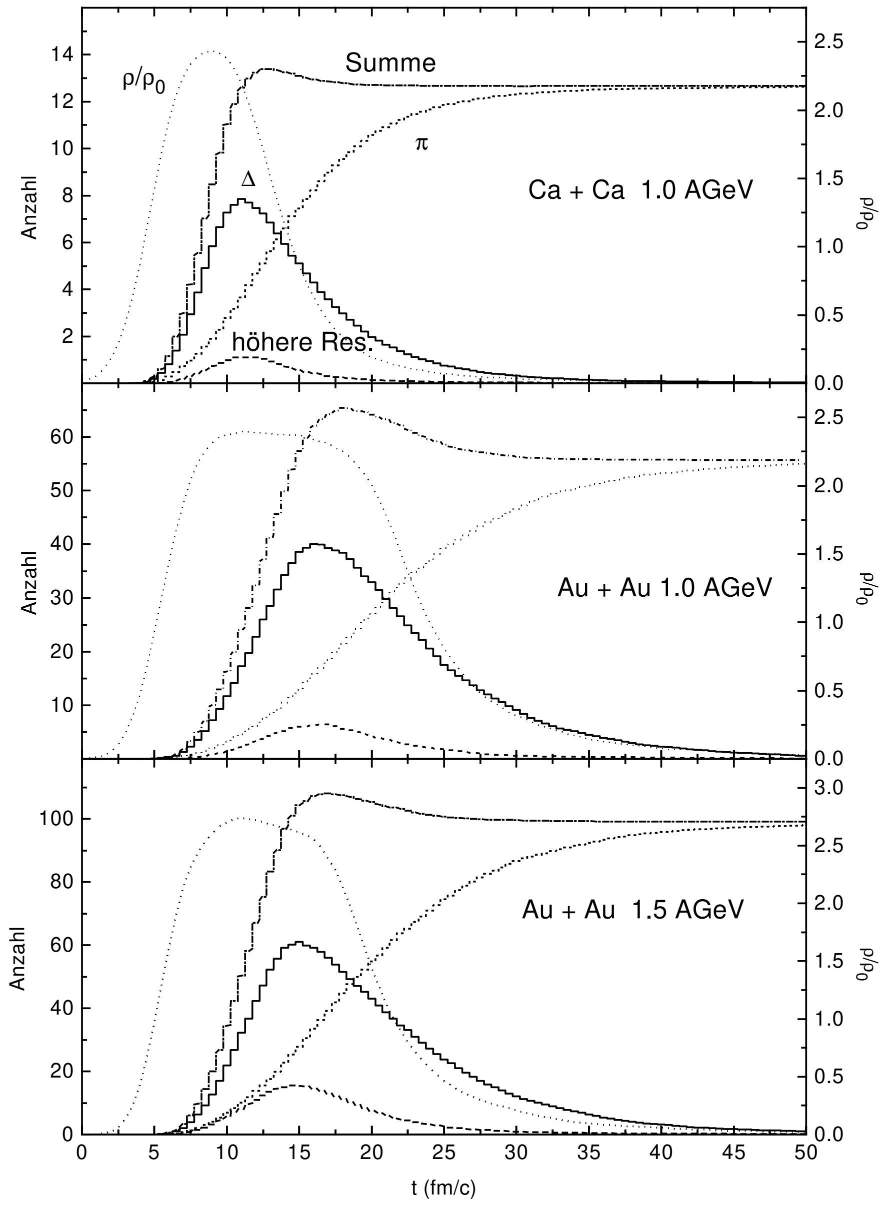

Abbildung 6.1: Die Zahl der $\Delta(1232)$ (durchgezogene Histogramme), die Summe der höheren baryonischen Resonanzen (gestrichelte Histogramme), die Zahl der Pionen (gepunktete Histogramme) und die Summe der $\Delta(1232)$, der höheren baryonischen Resonanzen und der Pionen (strichpunktierte Histogramme) für zentrale ($b = 0$ fm) Kollisionen als Funktion der Zeit. Die dünnen gepunkteten Linien stellen die Baryonendichte im Ursprung des Schwerpunktsystems der jeweiligen Reaktion dar. Oben: $Ca + Ca$ bei 1.0 AGeV, Mitte: $Au + Au$ bei 1.0 AGeV und unten: $Au + Au$ bei 1.5 AGeV.

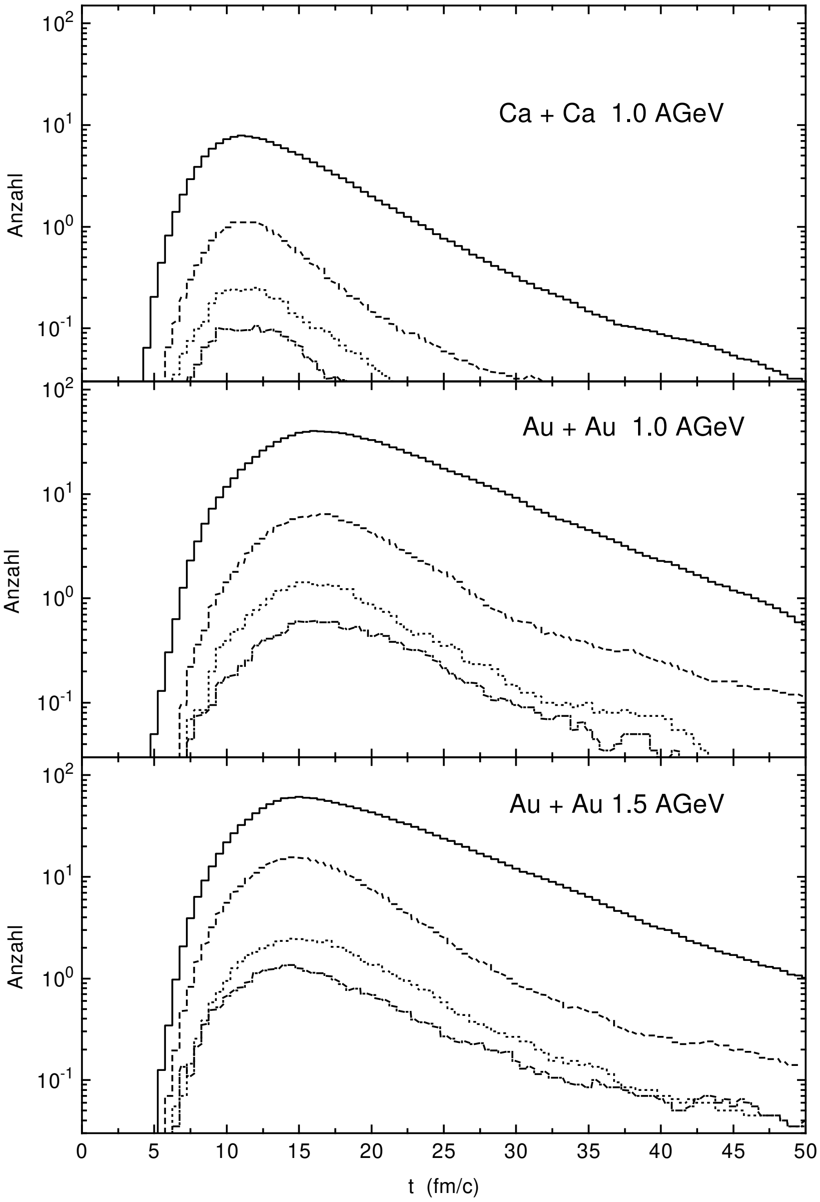

Abbildung 6.2: Die Zahl der $\Delta(1232)$ (durchgezogene Histogramme), die Summe der höheren baryonischen Resonanzen (gestrichelte Histogramme), die Zahl $N(1440)$ (gepunktete Histogramme) und die Zahl der $N(1535)$ (strichpunktierte Histogramme) für zentrale ($b = 0$ fm) Kollisionen als Funktion der Zeit. Oben: $Ca + Ca$ bei 1.0 AGeV, Mitte: $Au + Au$ bei 1.0 AGeV und unten: $Au + Au$ bei 1.5 AGeV.

und $N(1535)$ angeben. Während für das System $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV circa doppelt so viele $N(1440)$ wie $N(1535)$ erzeugt werden, hat sich dieser Unterschied bei der Einschußenergie von 1.5 AGeV deutlich verringert.

Bisher wurden absolute Größen miteinander verglichen. Um die drei Systeme nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ miteinander vergleichen zu können, zeigt Abbildung 6.3 die Zahl der Nukleonen, der $\Delta(1232)$, der Summe der höheren Resonanzen, die Summe der baryonischen Resonanzen und die Zahl der Pionen im System dividiert durch die Summe aus Projektil- und Targetnukleonen des jeweiligen Systems. Vergleicht man die beiden Systeme bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV, so zeigt die Resonanzdynamik fast keine Unterschiede. In beiden Systemen sind im Maximum $\approx$ 10% $\Delta(1232)$ und circa 2% höhere baryonische Resonanzen vorhanden. Während im Ca-System asympototisch 16% Pionen enthalten sind, so enthält das schwerere Au-System lediglich 14% freie Pionen. Dieser Unterschied kann darin begründet sein, daß es aufgrund der unterschiedlichen Systemgröße in der $Au + Au$-Kollision zu erhöhter Pionenabsorption ($RN \rightarrow NN$) kommt. Bei einer Einschußenergie von 1.5 AGeV kommt es zu einer größeren Energiedichte im Feuerball als bei 1.0 AGeV. Hier steigt die Summe aller baryonischen Resonanzen im Maximum auf circa 20% an, während sie bei der niedrigeren Energie bei nur circa 12% liegt. Dies spiegelt sich auch in der Zahl der produzierten Pionen wider, die auf $\approx$ 25% an steigt. Auch die Zahl der im Maximum vorhandenen höheren baryonischen Resonanzen ist um einen Faktor 2 auf circa 5% angestiegen. Die Maximalzahl der $\Delta(1232)$ ist hingegen nur um $\approx$ 50% auf insgesamt circa 15% angestiegen. Die Zahl der populierten höheren baryonischen Resonanzen im Vergleich zu den bevölkerten $\Delta(1232)$ stellt also ein relatives Maß für die in der Hochdichtephase einer Schwerionenkollision deponierte Energie dar.
Dies soll anhand von Abbildung 6.4 weiter untersucht werden. Hier sind die in den drei Systemen vorhandenen höheren Resonanzen pro angeregtem $\Delta(1232)$ als Funktion der Zeit aufgetragen. Die beiden Systeme mit einer Einschußenergie von 1.0 AGeV verhalten sich bezüglich ihrer Resonanzpopulation, wie weiter oben bereits angesprochen, nahezu identisch. Die Maximalzahl der bevölkerten höheren Baryonenresonanzen pro Δ ist identisch. Lediglich in der Expansionsphase kommt es zu Unterschieden auf einem Niveau von 2 bis 3%. Vergleicht man diese Systeme mit $Au+Au$ bei 1.5 AGeV, so wird die bereits erwähnte erhöhte Energiedeposition im Reaktionsvolumen bei der höheren Einschußenergie deutlich. Während bei 1.0 AGeV im Maximum nur circa 15% höhere Resonanzen pro $\Delta(1232)$ vorliegen, so steigt dieser Wert bei Erhöhung der Einschußenergie auf $\approx$ 25% und nähert sich für Zeiten von 35 bis 40 fm/c den bei niedriger Einschußenergie in der Endphase der Reaktion erzielten Werten an. Daher erhält man für 1.5 AGeV einen wesentlich steileren Abfall der Kurve als für die Systeme mit einer Einschußenergie von 1.5 AGeV. Dies deutet auf eine größere Expansionsgeschwindigkeit aufgrund der stärkeren Kompression (s. Abbildung 6.1) bei 1.5 AGeV hin.
Zum Abschluß dieses Abschnitts wird im folgenden die Stoßparameterabhängigkeit der Population der höheren Resonanzen untersucht. Dazu ist in Abbildung 6.5 die Zahl der $\Delta(1232)$, die Summe der höheren baryonischen Resonanzen, die Zahl der Pionen und die Baryonendichte im Zentrum des Reaktionsvolumens als Funktion der Zeit aufgetragen. Verglichen mit dem zeitlichen Ablauf der Resonanzpopulation für eine zentrale Kollision (s. Abbildung 6.1 Mitte) kommt es aufgrund des kleineren geometrischen

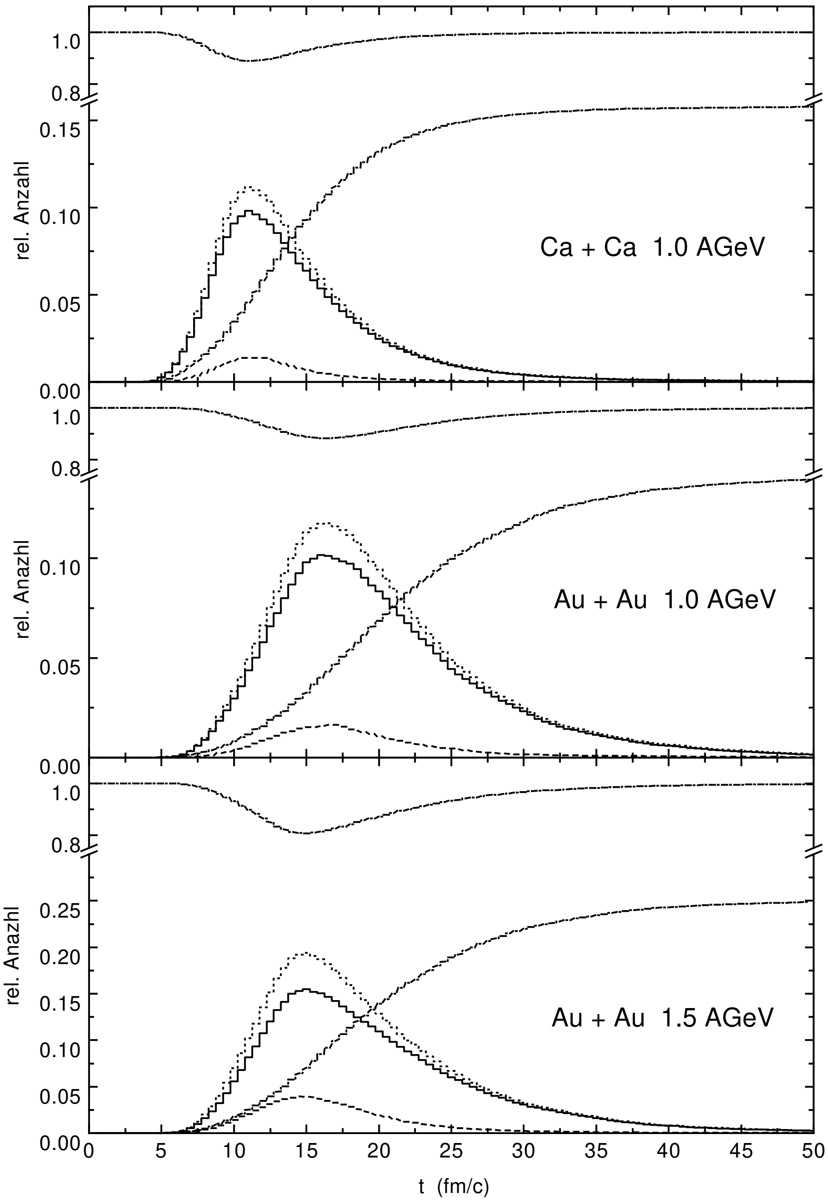

Abbildung 6.3: Die Zahl der Nukleonen (strichpunktierte Histogramme im oberen Teil der Abbildungen), Zahl der $\Delta(1232)$ (durchgezogene Histogramme), die Summe der höheren baryonischen Resonanzen (gestrichelte Histogramme), die Summe aller baryonische Resonanzen (gepunktete Histogramme) und die Zahl der Pionen (strichpunktierte Histogramme im untern Teil der Abbildungen) jeweils dividiert durch die Zahl der an der Reaktion teilnehmenden Baryonen für zentrale ($b = 0$ fm) Kollisionen als Funktion der Zeit. Oben: $Ca + Ca$ bei 1.0 AGeV, Mitte: $Au + Au$ bei 1.0 AGeV und unten: $Au + Au$ bei 1.5 AGeV.

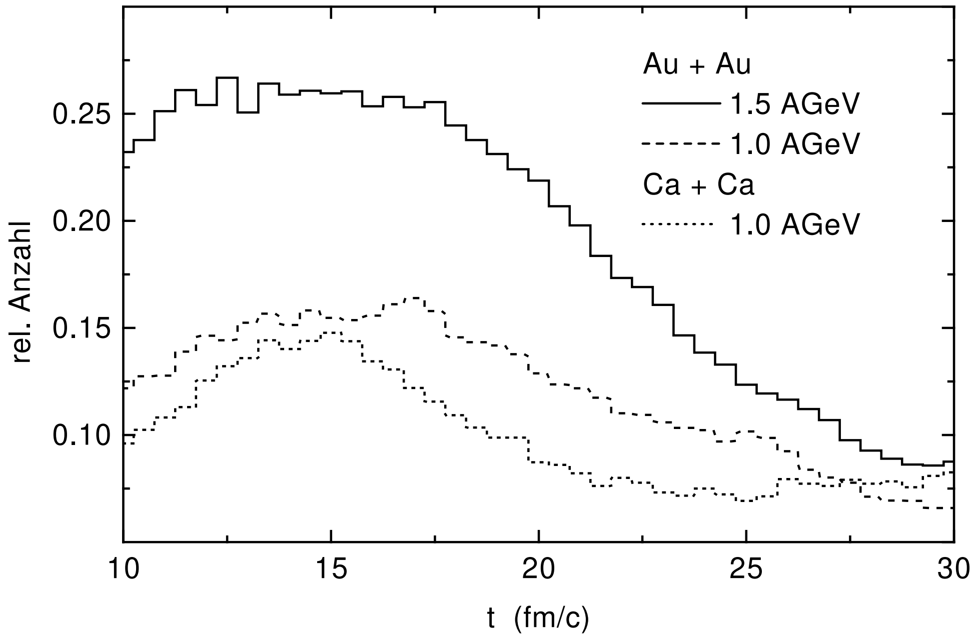

Abbildung 6.4: Die Zahl der in der Reaktion vorhandenen höheren baryonischen Resonanzen pro angeregtem $\Delta(1232)$ als Funktion der Zeit für zentrale ($b = 0$ fm) $Au+Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.5 AGeV (durchgezogene Linie), $Au + Au$- (gestrichelte Linie) und $Ca + Ca$-Kollisionen (gepunktete Linie) bei Einschußenergien von 1.0 AGeV.

Überlapps von Target und Projektil zu weniger Kompression im Reaktionszentrum. Dies zeigt sich an der um 20% kleineren Maximaldichte. Verglichen mit der zentralen Kollision ist die Hochdichtephase wesentlich kürzer. Aus diesem Grund werden in dieser peripheren Kollision auch weniger baryonische Resonanzen und Pionen erzeugt als in einer zentralen Kollision des gleichen Systems. Abgesehen von diesen quantitativen Unterschieden ergibt sich dasselbe qualitative Verhalten der Teilchenzahl als Funktion der Zeit wie in einer zentralen Kollision (vergleiche Abbildung 6.1 Mitte). Die kleinere Energiedichte des Feuerballs in einer peripheren Kollision kommt auch dadurch zum Ausdruck, daß weniger höhere baryonische Resonanzen pro angeregtem $\Delta(1232)$ erzeugt werden als dies in einer zentralen Reaktion der Fall ist. Dieser Vergleich ist in Abbildung 6.6 dargestellt.

6.2 Einfluß der höheren Resonanzen auf die Pionenproduktion

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß die Pionenproduktion hauptsächlich durch die $\Delta(1232)$-Resonanz bestimmt wird. Die Anregung der höheren baryonischen Resonanzen ist um einen Faktor 5 bis 10 kleiner als die des $\Delta(1232)$. Im folgenden soll untersucht werden, ob die Beiträge dieser höheren Baryonenresonanzen in den beobachtbaren Pionenspektren sichtbar werden.
Da die höheren baryonischen Resonanzen letztlich in ein Nukleon und ein Pion oder in ein Nukleon und zwei Pionen zerfallen (s. Kapitel 4.2), ist zu erwarten, daß die-

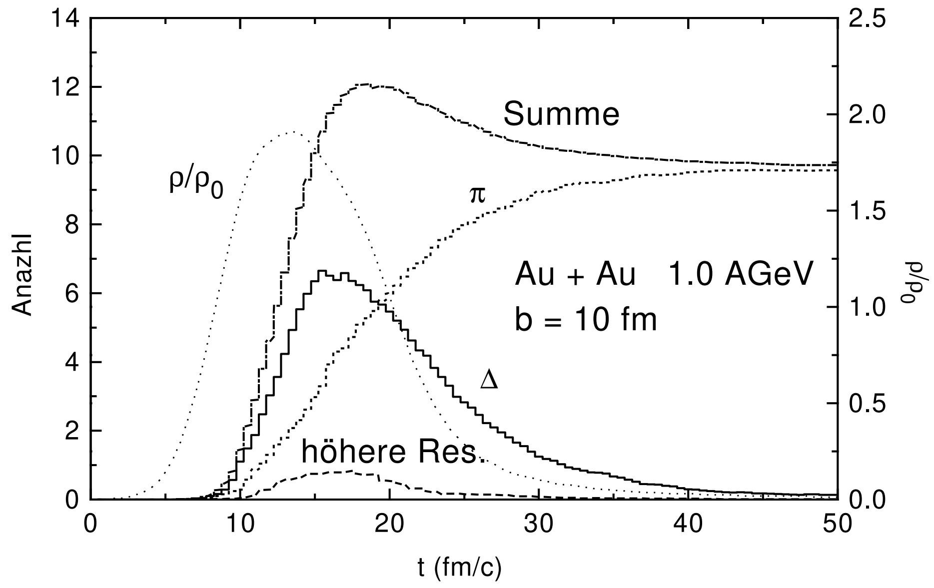

Abbildung 6.5: Die Zahl der $\Delta(1232)$ (durchgezogenes Histogramm), die Summe der höheren baryonischen Resonanzen (gestricheltes Histogramm), die Zahl der Pionen (gepunktetes Histogramm) und die Summe der $\Delta(1232)$, der höheren baryonischen Resonanzen und der Pionen (strichpunktiertes Histogramm) für eine $Au+Au$-Kollision mit der Einschußenergie von 1.0 AGeV bei einem Stoßparameter von 10 fm als Funktion der Zeit.

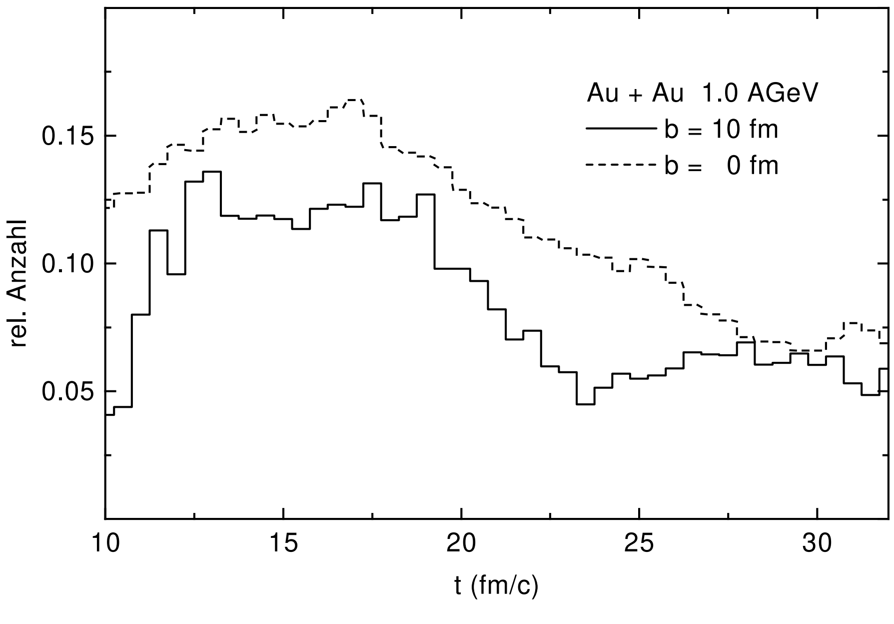

Abbildung 6.6: Die Zahl der angeregten höheren baryonischen Resonanzen pro populiertem $\Delta(1232)$ als Funktion der Zeit für eine periphere (b = 10 fm, durchgezogenes Histogramm) und eine zentrale (b = 0 fm, gestricheltes Histogramm) $Au+Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV.

se Resonanzen Beiträge zu den Pionenspektren in Bereichen kleiner und sehr großer Pionenenergien liefern. Pionen, die aus 2π-Zerfällen

$$\begin{array}{rcl} R \rightarrow & \Delta(1232)\,\pi & \rightarrow N\pi\pi \\ \rightarrow & N(1440)\,\pi & \rightarrow N\pi\pi \\ \rightarrow & N\,\rho & \rightarrow N\pi\pi \\ \rightarrow & N\,\sigma & \rightarrow N\pi\pi \end{array}$$

(s. Tabelle 4.1) der Baryonenresonanzen stammen, werden hauptsächlich im niederenergetischen Bereich des Spektrums zu finden sein, da hier ein 3-Körperzerfall der Resonanz R stattfindet und die Pionen, im Vergleich zum Einpionzerfall der Resonanz ($R\ N\pi$), mit kleineren Impulsen emittiert werden. Zerfällt eine höhere baryonische Resonanz andererseits in ein Nukleon und ein Pion, so hat dieses Pion im Mittel einen höheren Impuls als Pionen, die aus dem Zerfall eines $\Delta(1232)$ stammen. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß die Masse der höheren Baryonenresonanzen im Mittel mindestens 200 MeV/c^2 über der eines $\Delta(1232)$ liegt.
Diese Effekte werden nun anhand von zentralen $La + La$ Reaktionen bei einer Einschußenergie von 1.35 AGeV quantitativ untersucht. Dazu werden zuerst in Abbildung 6.7 die Pionenmultiplizitäten als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion für eine vollständige CBUU-Rechnung (durchgezogene Linie) und eine Simulationsrechnung, in der das $\Delta(1232)$ als einzige baryonische Resonanz enthalten ist (gestrichelte Linie), verglichen. Um dies zu erreichen, werden im CBUU-Modell alle Reaktionen, in denen höhere baryonische Resonanzen populiert werden können ($NN \rightarrow NR$, $N\Delta(1232) \rightarrow NR$, $\pi N \rightarrow R$ usw.), verboten. Durch Vergleich beider Graphen erkennt man, daß die höheren Resonanzen für kinetische Energien unter 200 MeV die Pionenmultiplizität um bis zu 15% erhöhen. Der Effekt für Pionen mit großen kinetischen Energien ist wesentlich ausgeprägter. Während die beiden Rechnungen im Bereich zwischen 200 MeV und ≈ 400 MeV nur geringe Unterschiede aufweisen, weichen sie für kinetische Energien über 500 MeV signifikant von einander ab. Schon für Energien von ≈ 600 MeV wird die Pionenmultiplizität durch die höheren Resonanzen um circa 50% erhöht und für Energien von ≈ 800 MeV ergibt sich sogar eine Erhöhung der Pionenzahl um einen Faktor 2.
Durch Abbildung 6.7 wurden die weiter oben diskutierten Effekte qualitativ bestätigt. Anhand von Abbildung 6.8 soll nun festgestellt werden, ob diese Beiträge auch im am Ende der Reaktion beobachtbaren Pionenspektrum identifizierbar sind. Die durchgezogene Linie stellt die totale Pionenmultiplizität als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im CMS dar. Die gepunktete Linie korrespondiert zu den Pionen, die aus dem Zerfall eines $\Delta(1232)$, aus direkter Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon Kollisionen oder aus dem Zerfall der mesonischen Resonanzen ρ und σ stammen. Die gestrichelte Linie korrespondiert zur Zahl der am Ende der Reaktion beobachtbaren Pionen, die durch den Zerfall einer höheren baryonischen Resonanz produziert werden. Auch hier erkennt man wieder einen Beitrag der höheren baryonischen Resonanzen in der Größenordnung von 10 bis 15% zur Pionenmultiplizität bei kleinen kinetischen Energien. Bei kinetischen Energien im Bereich von ≈ 200 MeV liefern sie nur einen Beitrag von bis zu 5%. Dieser Beitrag nimmt aber mit zunehmender kinetischer Energie der Pionen zu und für Energien von ≈ 500 MeV ist die Zahl der Pionen aus den hohen Baryonenresonanzen genauso groß wie die Zahl der Pionen aus den anderen Quellen.

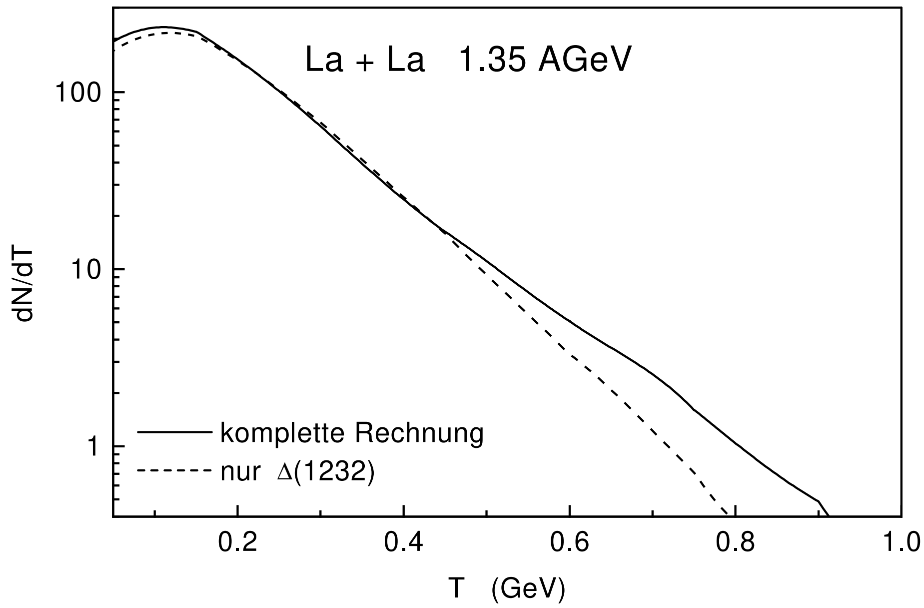

Abbildung 6.7: Pionenmultiplizität als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem für eine zentrale ($b = 0$ fm) $La + La$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.35 AGeV. Die durchgezogenen Linie korrespondiert zu einer Rechnung im Rahmen des CBUU-Modells. Die gestrichelte Linie repräsentiert das Ergebnis einer Rechnung ohne höhere baryonische Resonanzen.

Für Energien über 700 MeV stammt sogar der größte Teil der produzierten Pionen aus dem Zerfall der höheren baryonischen Resonanzen. Im unteren Teil der Abbildung 6.8 sind die Beiträge einzelner Resonanzen durch Histogramme ($N(1440)$ durchgezogen, $N(1535)$ gestrichelt und $\Delta(1600)$ gepunktet) dargestellt. Das Verhalten der Beiträge dieser drei Resonanzen als Funktion der kinetischen Energie der Pionen spiegelt die verschieden großen Partialbreiten der Resonanzen für den 1π- bzw. den 2π-Zerfall (s. Tabelle 4.1) der Resonanzen wider.
Zum Schluß dieses Abschnittes wird in Abbildung 6.9 die π^--Multiplizität dieses Systems als Funktion der kinetischen CMS-Energie der Pionen für den CMS-Winkelbereich $60^o \leq \Theta_{CMS} \leq 120^o$ mit experimentellen Daten von Odyniec et al. [79] verglichen. Man erkennt, daß das experimentelle Spektrum von der Transportrechnung recht gut reproduziert wird. Während sich für Energien kleiner als 200 MeV Abweichungen ergeben wird das Verhalten für Energien oberhalb von 300 MeV wiedergegeben. Die gute Übereinstimmung mit der Steigung des experimentell bestimmten Spektrums ist auf die Beiträge der höheren baryonischen Resnoanzen zu Pionenspektrum zurückzuführen (s. oben).

6.3 Beiträge der 2π-Kanäle zu Pionenspektren

In diesem Abschnitt werden die Beiträge der Reaktion $NN \to NN\pi\pi$ zu den Pio-

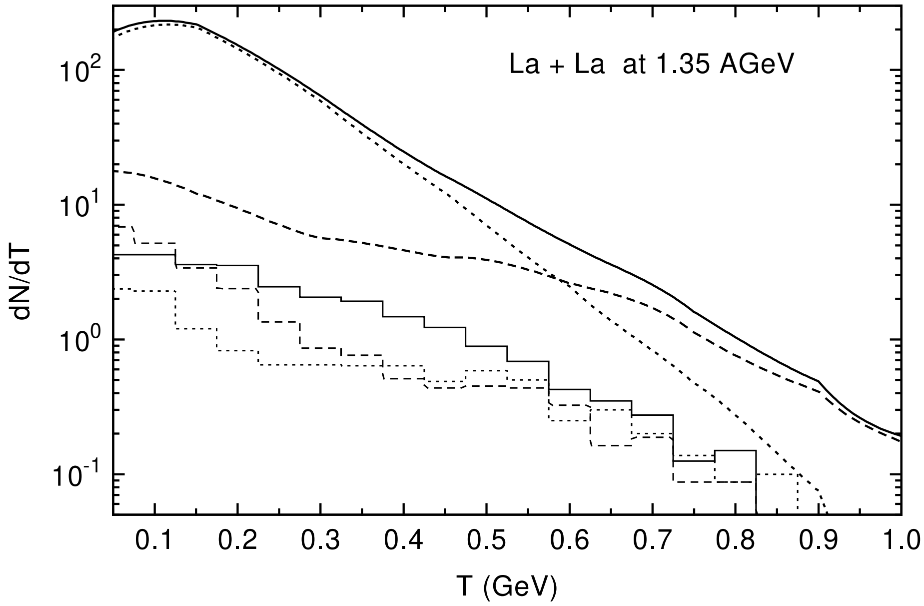

Abbildung 6.8: Pionenmultiplizität als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem für eine zentrale ($b = 0$ fm) $La + La$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.35 AGeV (durchgezogenen Linie). Gepunktete Linie: Beitrage des $\Delta(1232)$-Zerfalls, der direkten Pionen-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen und des Zerfalls der mesonischen Resonanzen ρ und σ zur Pionenmultiplizität. Gestrichelte Linie: Beiträge der höheren baryonischen Resonanzen. Die Beiträge einzelner baryonischer Resonanzen sind im unteren Teil der Abbildung durch Histogramme dargestellt: $N(1440)$ durchgezogen, $N(1535)$ gestrichelt und $\Delta(1600)$ gepunktet.

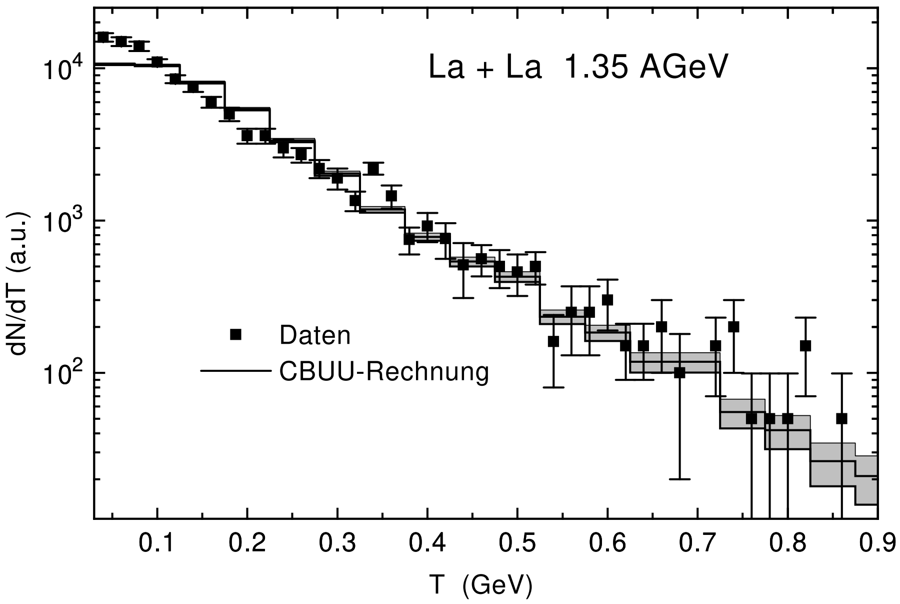

Abbildung 6.9: π^--Multiplizität als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem für eine zentrale ($b = 0$ fm) $La + La$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.35 AGeV (durchgezogenes Histogramm) für den CMS-Winkelbereich $60^o \leq \Theta_{CMS} \leq 120^o$ im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [79]. Die schraffierten Flächen geben die statistischen Fehler der CBUU-Rechnung an.

nenspektren untersucht. Wie im vorangegangenen Abschnitt bereits diskutiert, liefert diese Reaktion Beiträge im niederenergetischen Teil des Spektrums. Neben den bereits in Abschnitt 6.2 erwähnten Beiträgen der höheren baryonischen Resonanzen trägt auch die Reaktion $NN \to \Delta(1232)\Delta(1232) \to NN\pi\pi$ bei.
In Abbildung 6.10 ist die totale Pionenmultiplizität gewichtet mit dem Kehrwert des transversalen Pionenimpulses $1/p_T$ für eine zentrale $Au+Au$-Reaktion bei einer Einschußenergie von 1.5 AGeV als Funktion des transversalen Impulses dargestellt. Um die zu erwartenden Effekte deutlicher hervorzuheben wurde die Pionenmultiplizität nur für transversale Impulse bis 0.3 GeV/c dargestellt. Ferner ist zu beachten, daß für die Ordinate ein linearer Maßstab gewählt wurde. Die durchgezogene Linie korrespondiert zu einer kompletten CBUU-Rechnung und die gestrichelte Linie gibt das Ergebnis einer Rechnung an, bei der alle 2π-Kanäle vernachlässigt wurden. Dies wurde erreicht, indem sowohl die Reaktion $NN \to \Delta(1232)\Delta(1232)$ als auch deren Umkehrreaktion 'abgeschaltet' wurden. Für die höheren baryonischen Resonanzen wurden nur die Zerfälle in ein Nukleon und ein Pion bzw. ein Eta erlaubt ($\Gamma_{2\pi}=0$, $(\Gamma_{1\pi}+\Gamma_\eta)/\Gamma_{tot}=1$). Zusätzlich wurde mit diesen Partialbreiten die Quadrate der Matrixelemente $|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2$ für die Produktion der höheren baryonischen Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen (s. Abschnitt 4.4) neu bestimmt, um eine korrekte Behandlung der 1π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen zu gewährleisten. Für dieses Matrixelement ergab sich ein Wert von $16\pi \times 9$ mbGeV^2 für alle höheren Baryonenresonanzen.
Aus der Abbildung erkennt man, daß die Pionenmultiplizität durch die 2π-Kanäle bei kleinen Transversalimpulsen um $20-25\%$ erhöht wird. Mit zunehmenden transversalen Impulsen wird dieser Effekt immer kleiner und spielt schon bei Transversalimpulsen von circa 300 MeV keine Rolle mehr. Für Einschußenergien von 1.0 AGeV reduziert sich dieser Effekt auf circa 10%.

6.4 Das Mittlere-Feld-Potential der Baryonen

Neben den Wirkungsquerschnitten beeinflußt auch das Mittlere-Feld-Potential der Baryonen (s. Abschnitt 5.7.4) die Pionenproduktion in Schwerionenkollisionen. Dabei sind zwei verschiedene Effekte zu beachten:

- Das Mittlere-Feld-Potential der Baryonen beeinflußt die Gesamtdynamik einer Schwerionenkollision. So wird z.B. die Kernmaterie in der Hochdichtephase einer Schwerionenreaktion bei Verwendung einer weichen Zustandsgleichung für Kernmaterie (EOS) stärker komprimiert als dies für eine harte EOS der Fall ist. Dies bedeutet, daß die Bewegung der Baryonen verändert wird, was wiederum z.B. über einer Veränderung der Kollisionsraten die Pionenproduktion beeinflußt. Den gleichen Effekt erhält nan, wenn man die Verwendung von Skyrme-Einteilchen-Potentialen mit der von explizit impulsabhängigen Selbstenergien vergleicht. Die impulsabhängigen Potentiale sind für Baryonen mit großen Impulsen wesentlich repulsiver als die entsprechenden Skyrme-Potentiale. Dies führt dazu, daß die hadronische Materie weniger komprimiert wird als dies bei Verwendung der Skyrme-Parametrisierung der Fall ist.

- Die Beschreibung der 2-Teilchen Kollisionen und Resonanzzerfälle erfolgt im Rahmen des Quasiteilchenbildes (s. Kapitel 5.7.4). Somit gehen die Mittlere-Feld-

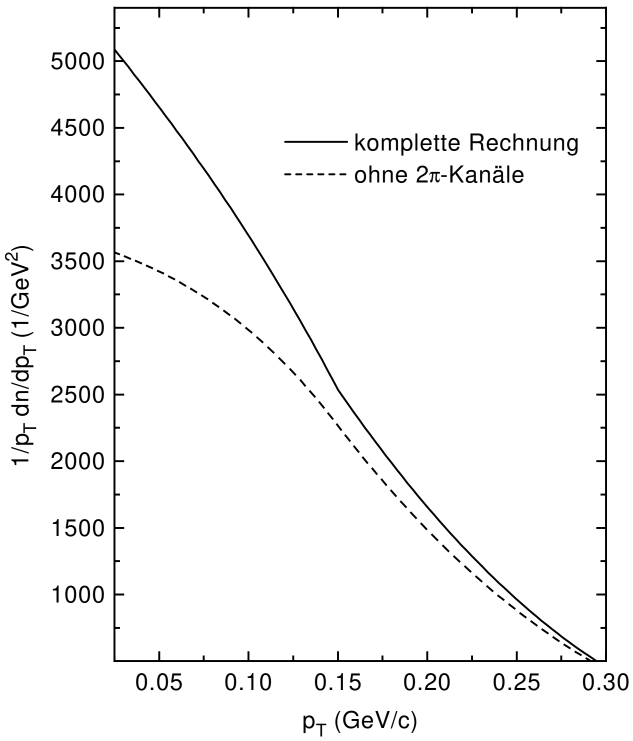

Abbildung 6.10: Totale Pionenmultiplizität gewichtet mit $1/p_T$ für eine zentrale $Au+Au$ Kollision bei einer Einschußenergie von 1.5 AGeV. Die durchgezogenen Linie stellt das Ergebnis einer kompletten CBUU-Rechnung dar und die gestrichelte Linie wurde unter Vernachlässigung der 2π-Kanäle (s. Text) erhalten.

Potentiale direkt in die Bestimmung der Energien und Impulse der in einer elementaren Kollision (z.B. $NN \rightarrow NR$, $R \rightarrow N\pi$) produzierten Teilchen, also auch der Pionen, ein.

Da die Gesamtdynamik einer Schwerionenkollisionen direkt mit den elementaren 2-Teilchen Kollisionen verknüpft ist, lassen sich die beiden genannten Effekte nicht getrennt voneinander untersuchen.
Im folgenden soll untersucht werden, wie das Mittlere-Feld-Potential der Baryonen die Pionenspektren beeinflußt. Dazu werden zuerst die aufgrund der verschiedenen Parametrisierungen des Einteilchen-Potentials (Skyrme-Potential, explizit impulsabhängiges Einteilchen-Potential) und deren numerischer Implementierung im CBUU-Modell (lokale Thomas-Fermi Näherung, 3-Flüssigkeiten-Modell) verursachten Unterschiede und anschließend die Einflüsse der EOS auf die Pionenspektren betrachtet.

6.4.1 Einfluß der verschiedenen Potentialmodelle

Im Rahmen des CBUU-Modells ist die Verwendung sowohl nicht impulsabhängiger Einteilchen-Potentiale (Skyrme-Parametrisierung, Abschnitt 3.1.2) als auch explizit impulsabhängiger Mittlere-Feld-Potentiale (3.1.2) möglich. Der obere Teil von Abbildung 6.11 zeigt die Unterschiede im Pionenspektrum, die sich aufgrund der Impulsabhängigkeit des Einteilchen-Potentials ergeben. In dieser Abbildung ist die totale Pionenmultiplizität gewichtet mit $1/p_T$ für eine zentrale $Au+Au$ Reaktion bei einer Einschußenergie

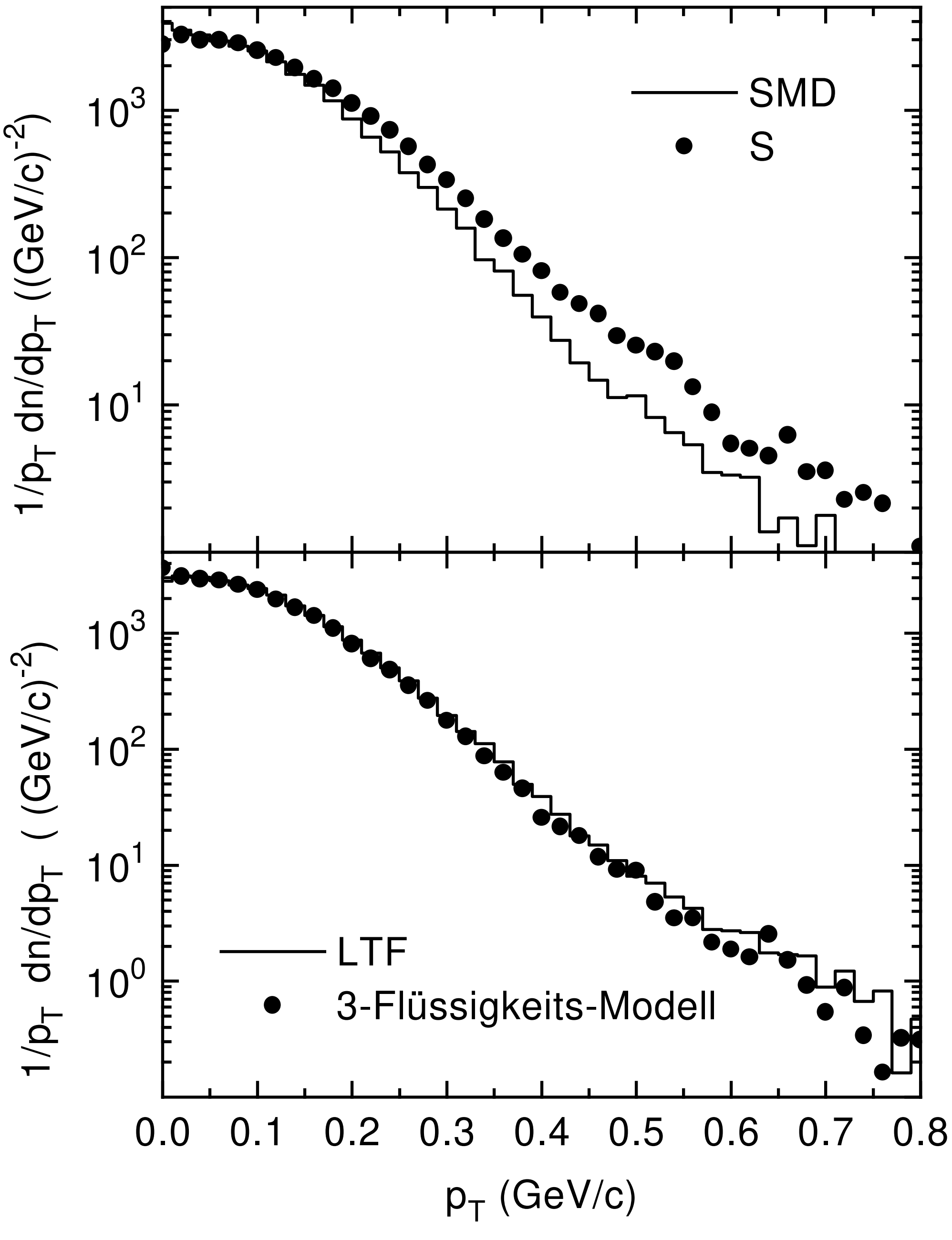

Abbildung 6.11: Totale Pionenmultiplizität gewichtet mit $1/p_T$ für eine zentrale $Au+Au$ Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV unter Verwendung verschiedener Potentialmodelle. Oben: Vergleich der Skyrme-Parametrisierung (Punkte) und der explizit impulsabhängigen Parametrisierung des Einteilchen-Potentials in der lokalen Thomas-Fermi Näherung (Histogramme). Für beide Rechnungen wurden Parametersätze mit einer Kompressibilität von 215 MeV (S bzw. SMD, s. Tabelle 3.1) verwendet. Unten: Vergleich der lokalen Thomas-Fermi-Näherung (Histogramme) und des 3-Flüssigkeiten-Modells (Punkte). Für beide Rechnungen wurde der Parametersatz MMD (s. Tabelle 3.1) verwendet.

von 1.0 AGeV für eine EOS mit einer Kompressibilität K von 215 MeV dargestellt. Das Histogramm korrespondiert zu einer Rechnung mit dem impulsabhängigen Einteilchen-Potential SMD, das in der lokalen Thomas-Fermi Näherung ausgewertet wurde, und die Punkte entsprechen einer Rechnung mit dem Skyrme-Potential S. Die Gesamtzahl der erhaltenen Pionen ist bei Verwendung des Skyrme-Potentials um circa 15% höher als bei Verwendung impulsabhängiger Selbstenergien. Während beide Multiplizitäten bei kleinen transversalen Impulsen identisch sind, liegt die Multiplizität, die mit dem Skyrme-Potential erhalten wurde, für größere Impulse oberhalb der Rechnung mit den explizit impulsabhängigen Einteilchen-Potentialen. Bei Transversalimpulsen von ≈ 0.5 GeV/c unterscheiden sich beide Rechnungen um circa einen Faktor 2. Für noch größere Impulse bleibt der Effekt sichtbar, die Unterschied können aber aufgrund der statistischen Schwankungen nicht mehr quantifiziert werden.
Die Unterschiede zwischen beiden Rechnungen können durch einfache Überlegungen verstanden werden: In der folgenden Diskussion wird die schwache, implizite Impulsabhängigkeit der skalaren Selbstenergie $U_s(\vec{r}, \vec{p})$, die durch Gleichung (3.44) bestimmt wird, vernachlässigt. Die beobachteten Unterschiede resultieren aus der expliziten Impulsabhängigkeit des Einteilchen-Potentials, da das Skyrme-Potential und die impulsabhängige Parametrisierung des Potentials dieselbe Dichteabhängigkeit haben (s. Abbildung 3.2 und 3.4). Bei Verwendung des Skyrme-Potentials haben bei einer festen Baryonendichte alle Baryonen unabhängig von ihrem Impuls dieselbe Selbstenergie, während die Selbstenergie eines Baryons bei Verwendung der explizit impulsabhängigen Parametrisierung um so repulsiver wird, je größer sein Impuls ist. Diese mit dem Impuls anwachsende Repulsion unterdrückt die Produktion hochenergetischer Pionen einerseits aufgrund der verminderten Kompression der Materie in der Hochdichtephase der Reaktion (s. weiter oben), andererseits aufgrund der Veränderung der Kinematik in den elementaren 2-Teilchen-Kollisionen.
Dieser zweite Punkt soll am folgenden Beispiel erläutert werden. Es wird der 1π-Zerfall zweier $\Delta(1232)$-Resonanzen (Δ_1, Δ_2) betrachtet. Beim Zerfall von Δ_1 und Δ_2 werden die Nukleonen N_1 und N_2 sowie die Pionen π_1 und π_2 produziert. Die Zerfälle sollen in den Ruhesystemen von Δ_1 bzw. Δ_2 stattfinden. Ferner sei angenommen, daß die effektive Masse von Δ_1 so groß sei, daß das Skyrme-Potential und das explizit impulsabhängige Einteilchen-Potential des beim Zerfall entstehenden Nukleons N_1 identische Werte annehmen. Damit ist die Zerfallskinematik für beide Potentialformen identisch. Insbesondere hängt der Impuls des Pions π_1 nicht davon ab, ob das Skyrme-Potential oder das explizit impulsabhängige Potential verwendet wird. Die effektive Masse von Δ_2 sei größer als die von Δ_1. Dies bedeutet, daß die Impulse der beim Zerfall emittierten Teilchen höher sind. Damit ist die Selbstenergie von N_2 bei Verwendung der explizit impulsabhängigen Parametrisierung repulsiver als die entsprechende Skyrme-Selbstenergie. Dies wiederum führt bei Verwendung der explizit impulsabhängigen Parametrisierung zu kleineren Impulsen der auslaufenden Teilchen N_2 und π_2 als dies bei Verwendung der Skyrme-Parametrisierung der Fall ist, was die reduzierte Multiplizität der Pionen bei großen Transversalimpulsen erklärt.

Im unteren Teil der Abbildung 6.11 ist ebenfalls die totale Pionenmultiplizität für eine zentral Reaktion $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV dargestellt. Hier werden die Einflüsse der numerischen Implementation der explizit impulsabhängigen Enteilchenenergien untersucht. Das Histogramm korrespondiert zu einer Rechnung, in der das Einteilchen-Potential der Baryonen im Rahmen der lokalen Thomas-Fermi Näherung (s. Abschnitt 5.2.1) ausgewertet wurde. Die unter Verwendung des 3-Flüssigkeiten-Modells erhaltenen Ergebnisse werden durch die Punkte repräsentiert. Die Gesamtzahl der produzierten Pionen ist für das 3-Flüssigkeits-Modell um nur circa 4% geringer als in der lokalen Thomas-Fermi Näherung. In der spektralen Verteilung sind im Rahmen der statistischen Schwankungen keine Unterschiede zwischen beiden Rechnungen festzustellen. Da im Anschluß an die Hochdichtephase einer Schwerionenreaktion nur noch geringe Unterschiede zwischen baryonischen Selbstenergien, die im Rahmen des 3-Flüssigkeits-Modells oder in der lokalen Thomas-Fermi Näherung berechnet werden (s. Abschnitt 5.2), bestehen, deutet dieses Ergebnis darauf hin, daß Pionen hauptsächlich in der Expansionsphase einer Schwerionenkollision emittiert werden.

6.4.2 Einfluß der Zustandsgleichung der Kernmaterie (EOS)

Wie bereits weiter oben angesprochen, beeinflußt die EOS die Gesamtdynamik einer Schwerionenkollision. Anhand von Abbildung 6.12 soll festgestellt werden, inwieweit die Pionenproduktion sensitiv auf die EOS ist. Dazu ist wieder die totale Pionenmultiplizität für zentrale $Au + Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion des transversalen Pionenimpulses dargestellt. Der obere Teil der Abbildung enthält die Ergebnisse für Skyrme-Einteilchen-Potentiale und der untere Teil korrespondiert zu Rechnungen, die mit explizit impulsabhängigen Parametrisierungen des Mittlere-Feld-Potentials durchgeführt wurden. In beiden Fällen läßt sich nur eine geringe Sensitivität der Pionenmultiplizität auf die verwendete EOS feststellen. Wie es zu erwarten war, erhält man um so weniger Pionen je härter die EOS wird. Die Gesamtzahl der Pionen liegt bei einer EOS mit $K = 380$ MeV allerdings nur circa 4% unter der Zahl der Pionen, die man bei Verwendung einer EOS mit $K = 215$ MeV erhält. Verglichen mit der Sensitivität z.B. der Kaonenproduktion in Schwerionenkollisionen [11] auf die EOS ist der hier beobachtete Effekt sehr klein. Die hier durchgeführten Vergleiche deuten wiederum darauf hin, daß Pionen erst in der Endphase einer Schwerionenreaktion erzeugt werden und somit nur geringe Sensitivität auf die EOS besitzen.

6.5 Stoßparameterabhängigkeit der Pionenproduktion

In diesem Abschnitt soll die Frage beantwortet werden, inwieweit die Pionenproduktion von der Reaktionsgeometrie einer Schwerionenkollision abhängt. Dazu ist in Abbildung 6.13 die Zahl der in einer $Au + Au$ Reaktion bei einer Eischußenernergie von 1.0 AGeV beobachtbaren Pionen N_π als Funktion des Stoßparameters der Reaktion dargestellt. Zunächst soll bemerkt werden, daß die Stoßparameterabhängigkeit für π^+ (nach unten gerichtete Dreiecke), π^0 (nach oben gerichtete Dreiecke) und π^- (Kreise) identisch ist. Daher wird in der folgenden Diskussion nur die Summe der drei Ladungszustände (Vierecke) betrachtet.

Für zentrale Kollisionen erhält man 55 Pionen. Mit zunehmendem Stoßparameter sinkt

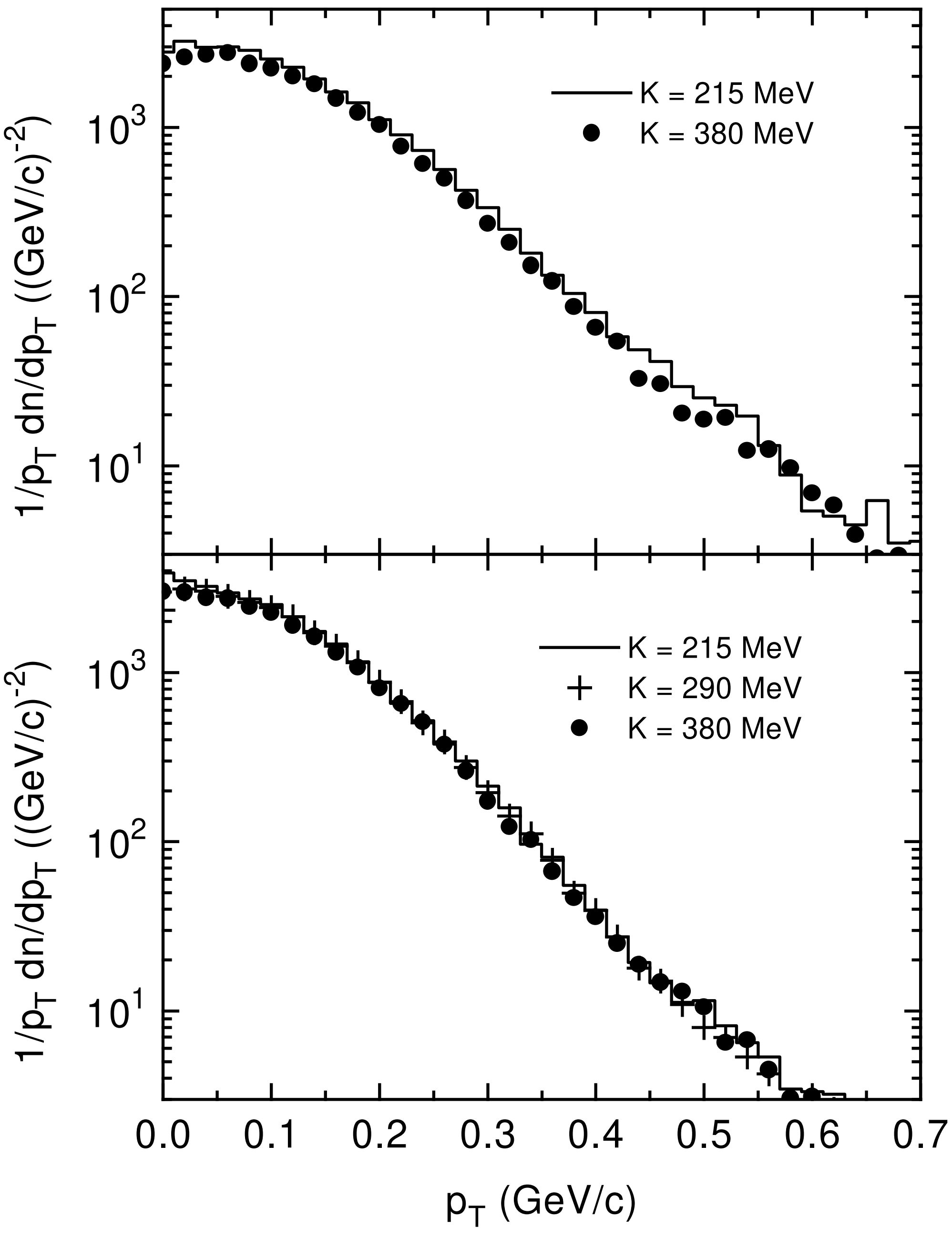

Abbildung 6.12: Totale Pionenmultiplizität gewichtet mit $1/p_T$ für eine zentrale $Au+Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV für verschiedene Zustandsgleichungen für Kernmaterie (EOS). Oben: Skyrme-Parametrisierung, das Histogramm korrespondiert zu einer EOS mit einer Kompressibilität $K = 215$ MeV (Parametersatz S) und die Punkte entsprechen einer Rechnung mit $K = 380$ MeV (Parametersatz H). Unten: impulsabhängige Parametrisierung des Einteilchen-Potentials in der lokalen Thomas-Fermi Näherung für verschiedene Zustandsgleichungen. Histogramm: $K = 215$ MeV (SMD), Kreuze: $K = 290$ MeV (MMD) und Punkte: $K = 380$ MeV (HMD).

diese Zahl ab und erreicht für Stoßparameter von 14 fm den Wert 0. Erwähnenswert ist der Verlauf der Kurve. Während die Kurve für kleine Stoßparameter ($0 \leq b \leq 3$ fm) einen konvexen Verlauf hat, ist der Zusammenhang zwischen der Pionenzahl und dem Stoßparameter für mittlere b linear, um für große Stoßparameter konkav gegen Null abzufallen.
Experimentell ist es nicht möglich, den Stoßparameter zu bestimmen. In Experimenten kann dagegen aus der Zahl der gemessenen geladenen Teilchen bzw. Fragmente auf die Zahl der an der Reaktion teilnehmenden Target- und Projektilnukleonen geschlossen werden. Diese Zahl A_{part} korreliert mit dem Stoßparameter. Als A_{part} soll die Zahl der Nukleonen verstanden werden, die mindestens an einer elementaren 2-Teilchen-Kollision (z.B. $NN \to NN$, $NN \to NR$) teilgenommen haben. In Abbildung 6.14 ist A_{part} für $Au + Au$ für eine Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion des Stoßparameters angegeben. Für kleine Stoßparameter fällt A_{part} nur sehr leicht mit steigendem Stoßparameter. Für mittlere b fällt A_{part} analog zu N_π linear mit b. Obwohl N_π und A_{part} ein ähnliches funktionales Verhalten in Abhängigkeit vom Stoßparameter aufweisen, besteht zwischen den beiden Größen kein linearer Zusammenhang, wie in Abbildung 6.15 gezeigt wird. Hier ist wiederum für dieselbe Reaktion die Zahl der produzierten Pionen N_π als Funktion von A_{part} aufgetragen. Während für periphere Kollisionen (kleine A_{part}) die Zahl der produzierten Pionen fast linear mit A_{part} anwächst, steigt N_π mit größer werdendem A_{part} schneller an. Dieses Verhalten deutet darauf hin, daß es in zentralen Kollisionen vermehrt zu Vielfachstößen kommt und somit pro partizipierendem Nukleon mehr Pionen produziert werden.
In Abbildung 6.16 ist N_π als Funktion von A_{part} für das kleinere System $Ca + Ca$ dargestellt. Hier wird ein ähnliches Verhalten für N_π als Funktion von A_{part} beobachtet. Für kleine A_{part} wächst N_π zunächst annähernd linear mit A_{part} an. Bei großen A_{part} tritt hier im Gegensatz zu dem schweren Au-System eine Sättigung von N_π ein.

Um beide Systeme genauer vergleichen zu können, ist in Abbildung 6.17 für beide Systeme N_π normiert auf die maximal beobachtete Zahl der Pionen N_π^{max} als Funktion von A_{part} dividiert durch die Summe von Target- und Projektilnukelonen A_{part}^{max} des entsprechenden Systems aufgetragen. Die Resultate stimme nur für ganz zentrale und extrem periphere Kollisionen überein, da für diese beiden Fälle die Geometrie beider Reaktionen übereinstimmt: im einen Fall überlappen Target und Projektil zu 100% und somit nehmen alle Nukleonen an der Reaktion teil. Im anderen Fall kommt es zu keinen Nukleon-Nukleon-Kollisionen und somit zu keiner Pionenproduktion. Für alle anderen Reaktionsgeometrien liegt die relative Pionenzahl N_π/N_π^{max} für das Ca-System immer über der des Au-Systems. Für den beobachteten Unterschied zwischen den beiden Systemen sind zwei Erklärungen denkbar: a) In nicht zentralen Reaktionen kommt es im Fall von $Au + Au$-Kollisionen aufgrund der Systemgröße zu einer stärkeren Pionenabsorption als in $Ca + Ca$-Kollisionen. b) In dem $Au + Au$ System kommt es vermehrt zu niederenergetischen Nukleon-Nukleon-Kollisionen, die nicht zur Pionenproduktion beitragen, aber A_{part} erhöhen. Welche dieser beiden Erklärungen zutrifft, oder ob beide Phänomene zu dem beobachteten Unterschied beitragen, soll in der Zukunft durch eine genauere Analyse festgestellt werden [80].
Die kleinen statistischen Fehlerbalken für die Mittelwerte von N_π und A_{part} dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, daß es sich bei N_π und A_{part} um statistische Verteilungen handelt. Dies wird durch die Abbildungen 6.18 und 6.19 näher erläutert. In diesen

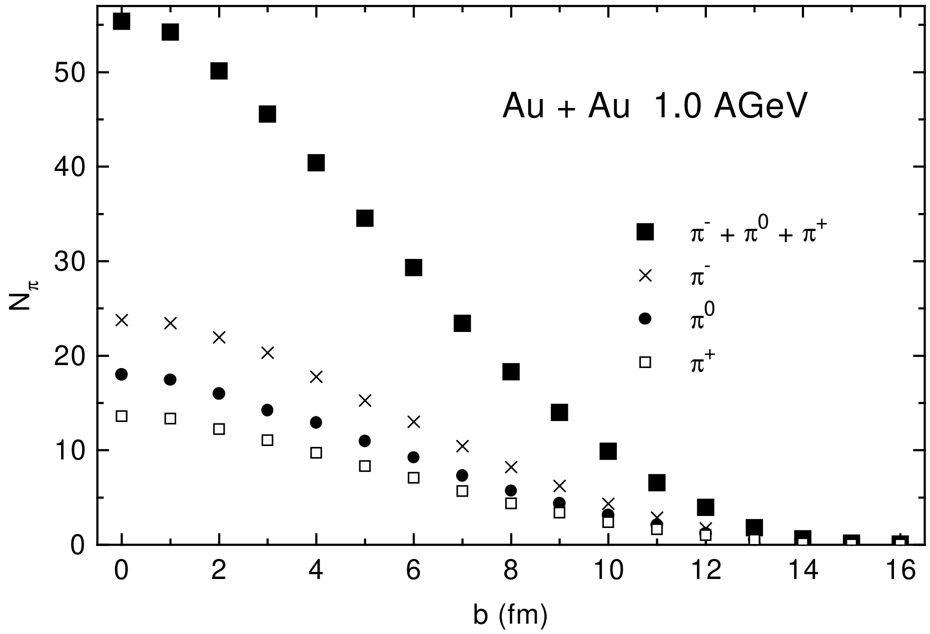

Abbildung 6.13: Zahl der in $Au + Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV produzierten Pionen (Vierecke) als Funktion des Stoßparameters. Die Zahl der produzierten π^+, π^0 und π^- werden durch die nach unten bzw. nach oben gerichteten Dreiecke und die Kreise dargestellt. Die statistischen Fehler der Rechnung sind kleiner als die zur Darstellung verwendeten Symbole.

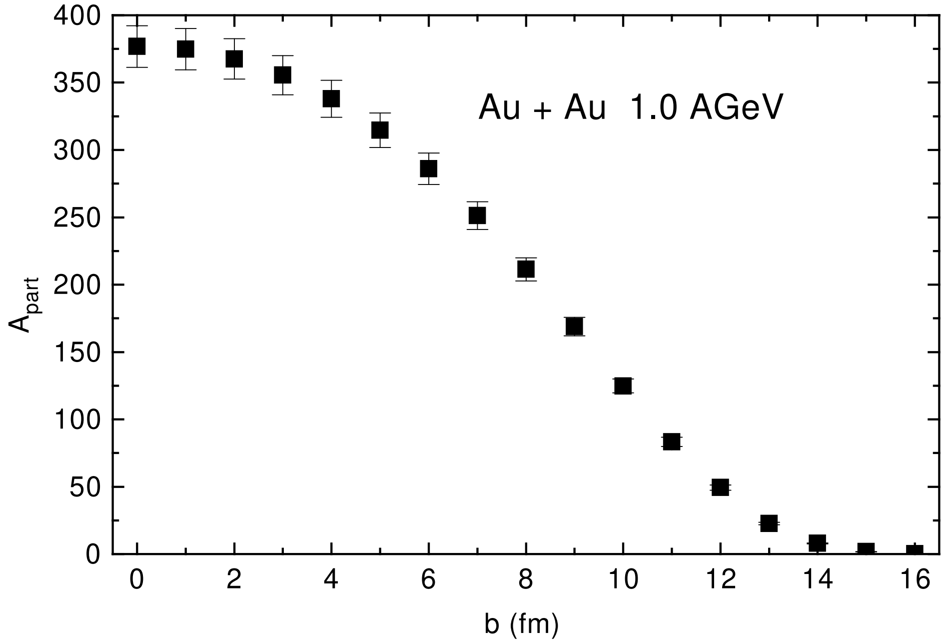

Abbildung 6.14: Zahl der Nukleonen A_{part}, die an mindestens einer elementaren Baryon-Baryon-Kollision teilgenommen haben, als Funktion des Stoßparameters. A_{part} ist für die Reaktion $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV dargestellt. Die Fehlerbalken geben die statistischen Fehler der Rechnung an.

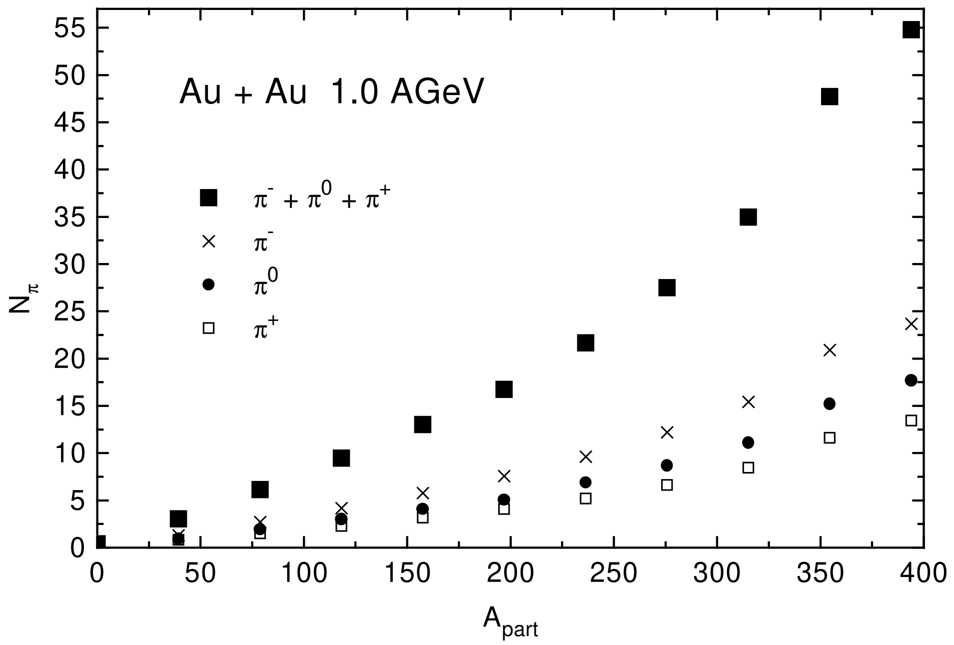

Abbildung 6.15: Zahl der in $Au + Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV produzierten Pionen (Vierecke) als Funktion von A_{part}. Die Zahl der produzierten π^+, π^0 und π^- werden durch die nach unten bzw. nach oben gerichteten Dreiecke und die Kreise dargestellt. Die statistischen Fehler der Rechnung sind kleiner als die zur Darstellung verwendeten Symbole.

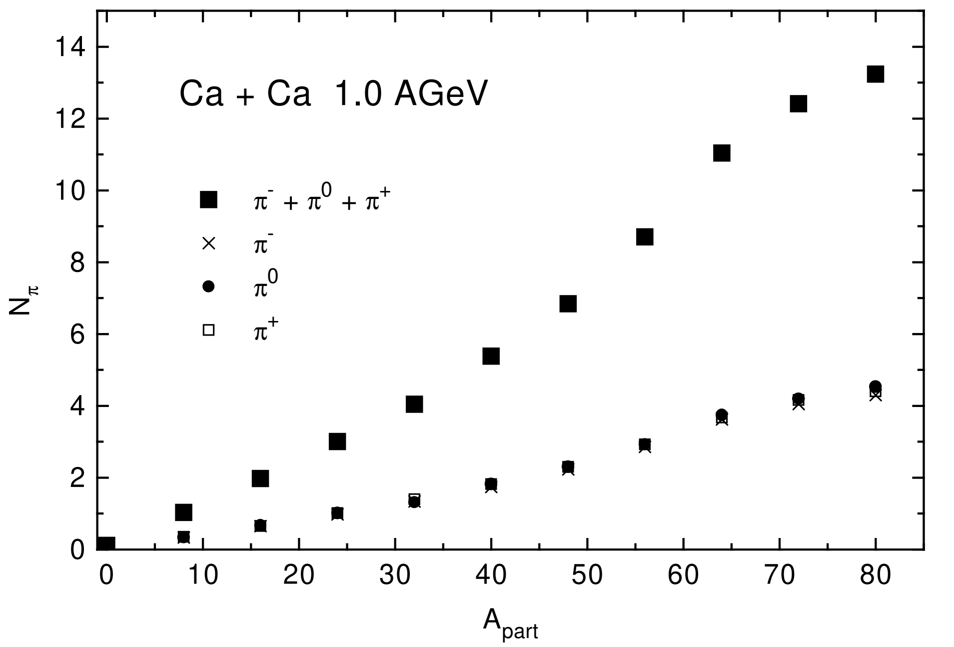

Abbildung 6.16: Zahl der in $Ca + Ca$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV produzierten Pionen (Vierecke) als Funktion von A_{part}. Die Zahl der produzierten π^+, π^0 und π^- werden durch die offenen Vierecke, die Punkte bzw. die Kreuze dargestellt, die wegen der Isospinsymmetrie des Systems alle zusammenfallen. Die statistischen Fehler der Rechnung sind kleiner als die zur Darstellung verwendeten Symbole.

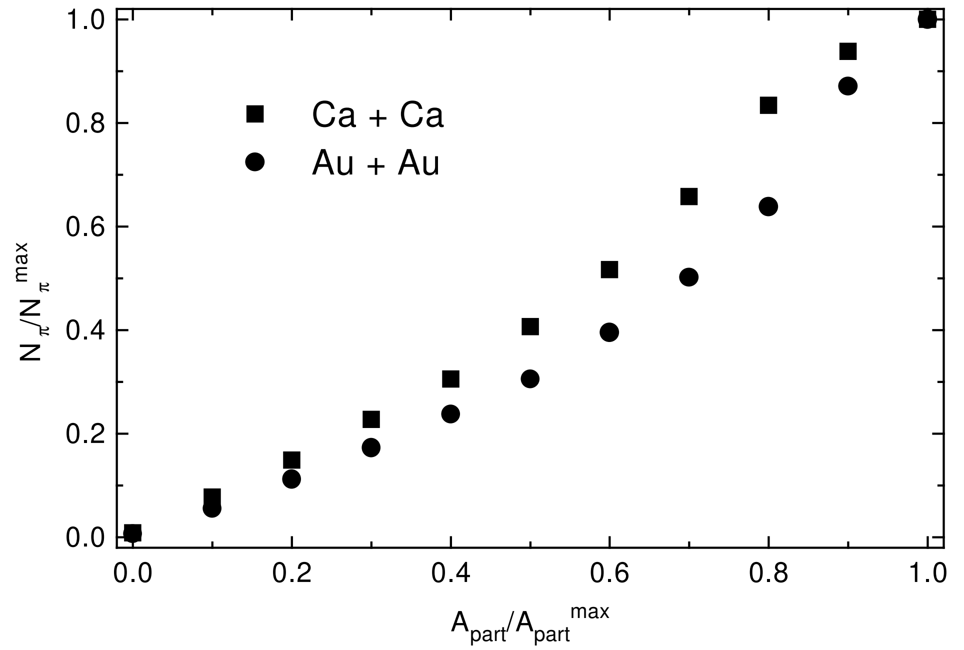

Abbildung 6.17: N_π/N_π^{max} (s. Text) als Funktion von A_{part}/A_{part}^{max} (s. Text) für die Reaktionen $Ca + Ca$ (Vierecke) und $Au + Au$ (Kreise) bei 1.0 AGeV.

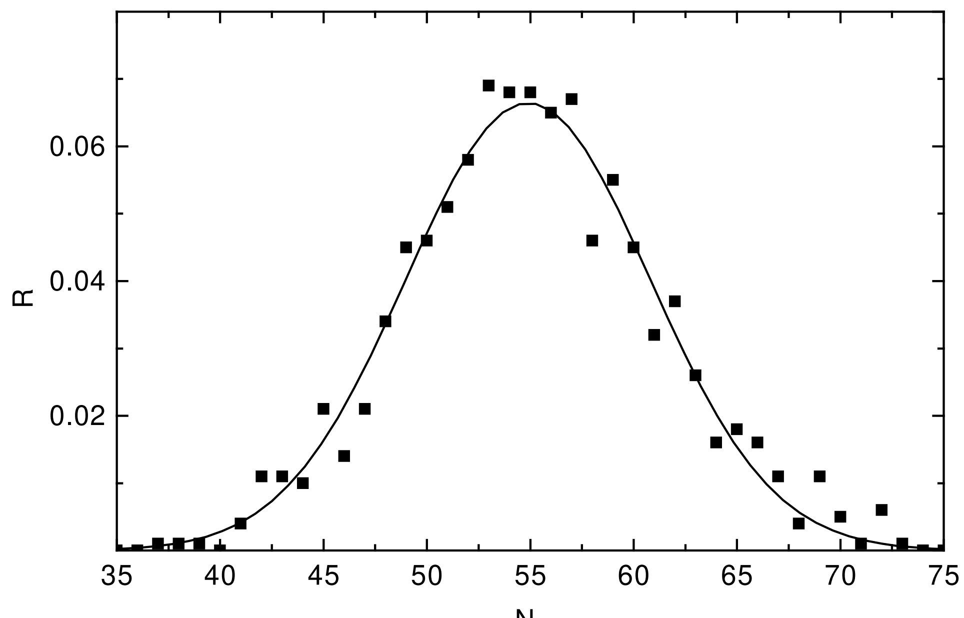

Abbildung 6.18: Relative Anzahl R der CBUU-Ereignisse einer $Au + Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV und einem Stoßparameter von 0 fm als Funktion der produzierten Pionen (Vierecke). Die durchgezogene Linie repräsentiert eine Gauß-Interpolation an die CBUU-Ergebnisse.

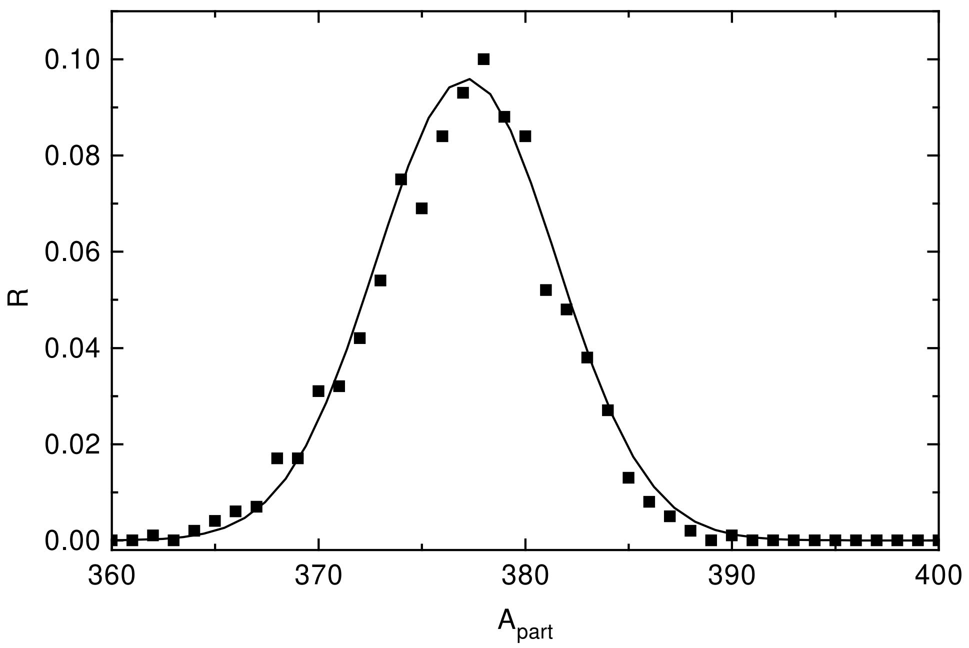

Abbildung 6.19: Relative Anzahl R der CBUU-Ereignisse einer $Au + Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV und einem Stoßparameter von 0 fm als Funktion von A_{part} (Vierecke). Die durchgezogene Linie repräsentiert eine Gauß-Interpolation an die CBUU-Ergebnisse.

Abbildungen sind für zentrale Ereignisse ($b = 0$ fm) desselben Systems die relative Anzahl R der CBUU-Ereignisse als Funktion der erhaltenen Zahl der Pionen N_π bzw. A_{part} zusammen mit den entsprechenden Gauß-Interpolationen dargestellt. Für N_π ergibt sich eine Verteilung mit dem in Abbildung 6.13 dargestellten Mittelwert von 55 und einer Breite von 14. Die Zahl der an der Reaktion teilnehmenden Nukleonen hat einen Mittelwert von 377 und eine Breite von 12.

Nach diesen Ausführungen soll zum Schluß dieses Abschnittes die mittlere Zahl der Pionen für zentrale Schwerionenreaktionen anhand von Abbildung 6.20 mit experimentellen Daten verglichen werden. Die ausgefüllten Symbole geben die im Rahmen des CBUU-Modells für zentrale ($b = 1$fm) Reaktionen erhaltene Zahl der Pionen, dividiert durch die Summe der jeweiligen Target- und Projektilmasse, als Funktion der Einschußenergie wieder. Die offenen Symbole repräsentieren die Ergebnisse einer Analyse von Harris et al. [81, 82], in der die experimentell gemessene Zahl der Pionen für die Systeme $La + La$ und $Ar + KCl$ für verschiedene Einschußenergien auf zentrale Ereignisse extrapoliert wurde. Man erkennt, daß die experimentellen Werte für alle Einschußenergien durch die Transportrechnungen um etwa 20 bis 30% überschätzt werden.

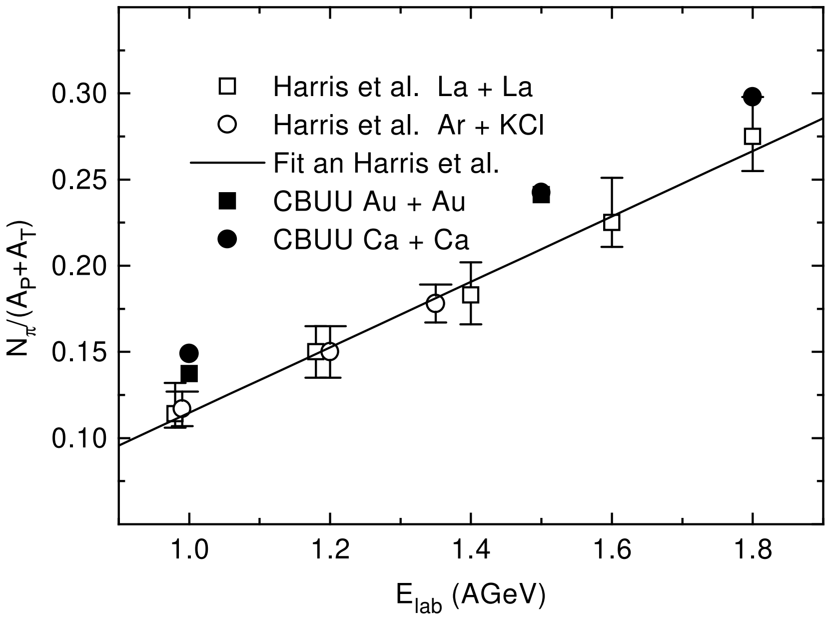

Abbildung 6.20: Mittlere Zahl der Pionen in zentralen Schwerionenkollisionen produzierten Pionen für verschiedene Systeme, dividiert durch die Summe der jeweiligen Projektil- und Targetmasse, als Funktion der Einschußenergie im Labor. Die ausgefüllten Symbole korrespondieren zu CBUU-Rechnungen für das System $Au+Au$ (Vierecke) und $Ca+Ca$ (Kreise). Es wurden Ereignisse mit einem Stoßparameter von 1 fm verwendet. Die offenen Symbole repräsentieren die Ergebnisse einer Analyse von Harris et al. [81, 82], in der die experimentell bestimmte Zahl der Pionen für die Systeme $La+La$ (Vierecke) und $Ar+KCl$ (Kreise) auf zentrale Ereignisse extrapoliert wurde. Die durchgezogene Linie stellt einen linearen Fit an diese Extrapolation dar.

Kapitel 7

Coulomb-Effekte auf Pionenspektren

In diesem Kapitel werden die Einflüsse des Coulomb-Potentials auf die in einer Schwerionenkollision emittierten geladenen Pionen untersucht. Dazu wird zuerst eine Korrelation zwischen der Produktionszeit, der Dichte am Ort ihrer Produktion und dem Coulomb-Potential, das die Pionen zur Zeit ihrer Produktion erfahren, und dem Impuls der Pionen im Schwerpunktsystem der Schwerionenkollision hergestellt. Es stellt sich heraus, daß das Verhältnis der π^-- und π^+-Spektren eine experimentelle Observable darstellt, die auf die Expansionsphase der Schwerionenreaktion sensitiv ist.
Anschließend wird die Abhängigkeit dieses π^-/π^+-Verhältnisses von der Zentralität der Reaktion und vom Emissionswinkel der Pionen untersucht, bevor Vorhersagen für das System $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV.

7.1 Korrelationen zwischen Coulomb-Effekten und der Reaktionsdynamik

Wie bereits in Kapitel 6.1 gezeigt wurde, werden in Schwerionenkollisionen mit Einschußenergien im Bereich von $1-2$ AGeV baryonische Resonanzen wie $\Delta(1232)$, $N(1440)$, $N(1535)$ usw. vor allem in der Hochdichtephase der Reaktion erzeugt. Die Anregungsmechanismen sind Nukleon-Nukleon-Kollisionen, Nukleon-Resonanz-Stöße oder Nukleon-Meson Reaktionen. Die so entstandenen baryonischen Resonanzen werden entweder in Resonanz-Nukleon Reaktionen reabsorbiert oder zerfallen in Nukleonen und Pionen. Falls diese Zerfälle in der Hochdichtephase stattfinden, so werden die Pionen mit hoher Wahrscheinlichkeit wieder absorbiert. Finden sie hingegen in Gebieten relativ niedriger Dichte statt, so besteht die Chance, daß die Pionen ausfrieren und somit als freie, experimentell beobachtbare Pionen die Reaktionszone verlassen. Dies bedeutet ferner, daß die Mehrzahl der beobachteten Pionen von in der Expansionsphase zerfallenden baryonischen Resonanzen stammt. Das wiederum erklärt, warum die Zahl der Pionen während einer Schwerionenkollision monoton anwächst (s. Abbildung 6.1) und am Ende der Reaktion den asymptotischen Wert erreicht.
Die soeben dargelegten Argumente werden nun anhand von Abbildung 7.1 quantitativ untermauert. In dieser Abbildung ist die Zahl der asymptotisch beobachteten

Pionen als Funktion ihrer Ausfrierzeit für zentrale $Au + Au$ Kollisionen bei 1.0 AGeV dargestellt. Unter der Ausfrierzeit eines Pions wird der Zeitpunkt der letzten Wechselwirkung des Pions mit einem Hadron (Entstehung des Pions aus Resonanzzerfall, elastische Pion-Pion-Kollision o.ä.) verstanden. Die durchgezogene, die gestrichelte und die gepunktete Linie geben jeweils die Zahl der ausfrierenden Pionen mit einem Impuls von 0.2 GeV/c, 0.6 GeV/c und 1.0 GeV/c im Schwerpunktsystem der Reaktion an. In allen drei betrachteten kinematischen Bereichen erreicht die Zahl der erzeugten Pionen zu Zeiten von $\approx$ 12 fm/c 10% des Maximalwertes. Dieser Maximalwert wird jeweils zwischen 15 und 25 fm/c erreicht. Anschließend nimmt die Zahl der ausfrierenden Pionen langsam ab. Da zur Produktion von Pionen mit kleinen Impulsen weniger Energie als zur Produktion von Pionen mit hohen Impulsen aufgewendet werden muß, ergeben sich neben den soeben angesprochenen Gemeinsamkeiten quantitative Unterschiede für die drei betrachteten Impulsbereiche. Während schon zu Beginn des räumlichen Überlapps beider Schwerionen langsame Pionen erzeugt werden, setzt die Produktion von Pionen mit hohen Impulsen erst zu späteren Zeiten ein. Erst in der Hochdichtephase der Schwerionenreaktion ist die Energiedichte in der Reaktionszone groß genug, um die Produktion harter Pionen zu ermöglichen. Aus demselben Grund sinkt die Produktionsrate harter Pionen gegen Ende der Reaktion schneller als die weicher Pionen. Dieses Verhalten kann im Rahmen des Resonanzbildes anschaulich erklärt werden: Vernachlässigt man die direkte Produktion von Pionen in Nukleon-Nukleon-Stößen (s. Abschnitt 4.7), so entstehen die Pionen immer aus dem Zerfall baryonischer Resonanzen. Je härter die erzeugten Pionen sind, um so schwerer müssen die baryonischen Resonanzen sein, aus deren Zerfall die Pionen hervorgehen. Die Population baryonischer Resonanzen mit großen Massen erfolgt durch Vielfachstöße und setzt somit erst in der Hochdichtephase ein. Somit können extrem harte Pionen nicht in der Anfangsphase der Reaktion, sondern erst in der Hochdichtephase entstehen. Um das zeitliche Verhalten der Pionenproduktion zu späteren Zeiten zu verstehen, muß man weiterhin beachten, daß die Zerfallsbreite einer Resonanz mit der Masse ansteigt (s. Abschnitt 4.2). Dies hat zur Folge, daß die schweren Resonanzen, im Vergleich zu den leichten Resonanzen, nach ihrer Produktion schneller zerfallen. Ferner können Resonanzen kleiner Masse auch durch weniger energetische Nukleon-Nukleon-Kollisionen in der Expansionsphase einer Schwerionenreaktion populiert werden. Somit läßt sich mit Hilfe des Resonanzmodells verstehen, warum sich die Produktion der weichen Pionen über die gesamte Schwerionenreaktion erstreckt, während das Ausfrieren der harten Pionen auf einen recht kurzen Zeitraum beschränkt bleibt.
Aus Abbildung 7.1 geht ferner hervor, daß das Maximum der Pionenverteilung für harte Pionen bei kleineren Zeiten liegt als das der Verteilung für weiche Pionen. Dieses Verhalten wird anhand von Abbildung 7.2 quantitativ dargestellt. Hier ist die mittlere Produktionszeit der Pionen als Funktion ihres Impulses im Schwerpunktsystem der Reaktion $Au + Au$ bei 1.0 AGeV dargestellt. Wie auch in Abbildung 7.1 wurden nur zentrale Ereignisse (b = 0 fm) verwendet. Die Vierecke stellen die im Rahmen des CBUU-Modells erhaltenen Ergebnisse dar. Die durchgezogene Linie ergibt sich aus einer mit diesen Ergebnissen durchgeführten linearen Regression. Man erkennt, daß weiche Pionen im Durchschnitt 10 fm/c später als harte Pionen mit einem Impuls von 1.0 GeV/c emittiert werden. Der in einer zentralen Schwerionenreaktion geformte Feuerball expandiert nach der Produktion hochenergetischer Pionen also im Mittel für

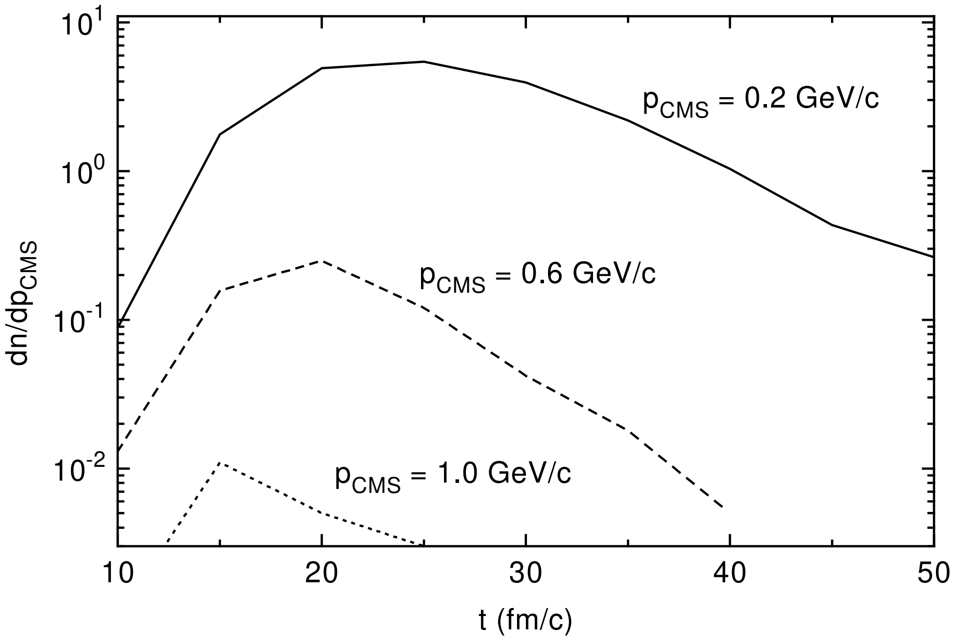

Abbildung 7.1: Zahl der am Ende der Reaktion $Au + Au$ bei 1.0 AGeV beobachteten Pionen als Funktion ihrer Produktionszeit für drei verschiedene kinematische Bereiche. Es wurden nur zentrale Ereignisse ($b = 0$ fm) berücksichtigt. Die durchgezogene Linie korrespondiert zu Impulsen von 0.2 GeV/c, die gestrichelte Linie zu Impulsen von 0.6 GeV/c und die gepunktete Linie zu Impulsen von 1.0 GeV/c im Schwerpunktsystem der Schwerionenreaktion.

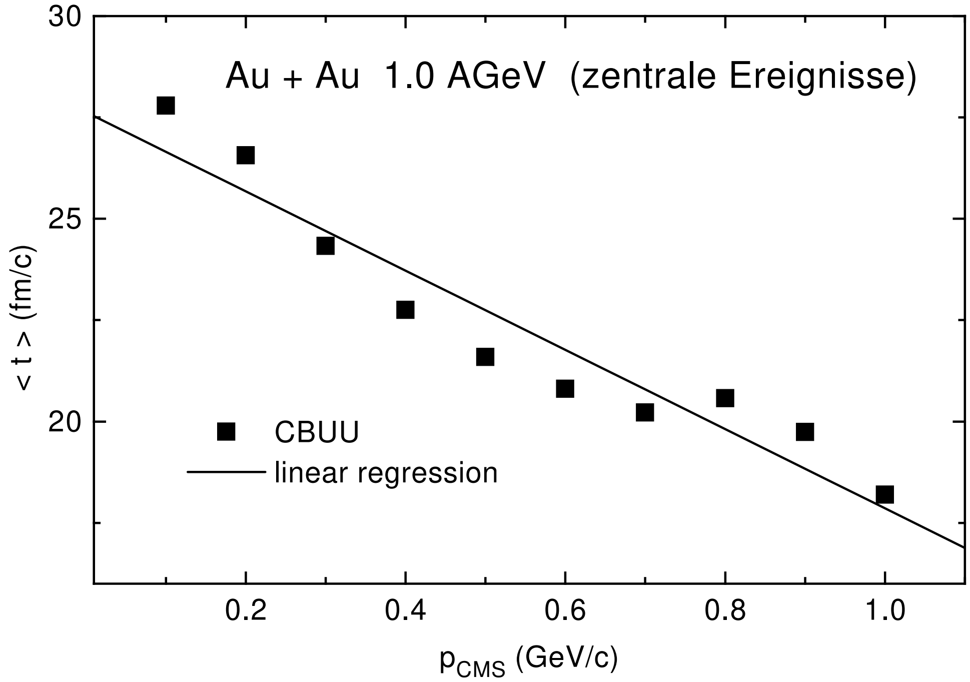

Abbildung 7.2: Mittlere Produktionszeit von Pionen für zentrale ($b = 0$ fm) $Au + Au$-Reaktionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion des Pionenimpulses im Schwerpunktsystem der Reaktion. Die Vierecke geben die Ergebnisse des CBUU-Modells an und die durchgezogene Linie korrespondiert zu einem linearen Fit an diese Ergebnisse.

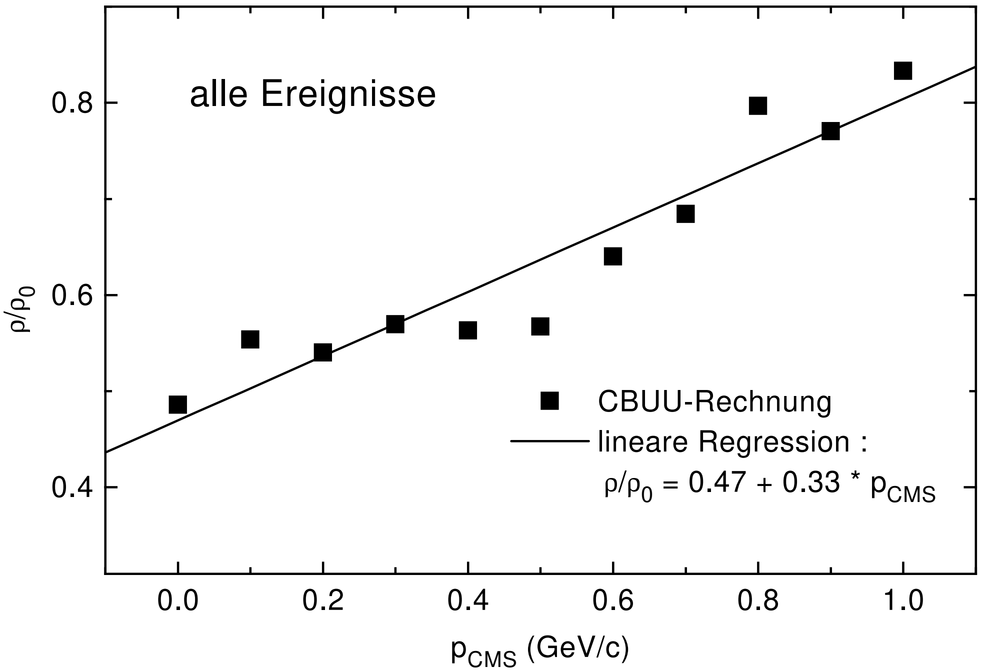

Abbildung 7.3: Mittlere Baryonendichte am Produktionsort der Pionen für die Reaktion $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion des Pionenimpulses im Schwerpunktsystem der Reaktion. Die Vierecke geben die Ergebnisse des CBUU-Modells an und die durchgezogene Linie korrespondiert zu einem linearen Fit an diese Ergebnisse.

10 fm/c bevor es zum Ausfrieren der weichen Pionen kommt. Dies bedeutet, wie in Abbildung 7.3 gezeigt, daß die harten Pionen im Mittel bei höheren Baryonendichten ausfrieren als die weichen Pionen. In dieser Abbildung ist die durchschnittliche Dichte, bei der die Pionen produziert werden, für $Au+Au$-Kollisionen bei 1.0 AGeV als Funktion des Pionenimpulses im Schwerpunktsystem abgebildet. Man erkennt, daß Pionen mit Impulsen von $\approx$ 1.0 AGeV während der Expansionsphase der Feuerballs durchschnittlich bei Dichten von $0.8\rho_0$ emittiert werden. Die weichen Pionen, die am Ende der Reaktion beobachtbar sind, werden hingegen im Durchschnitt erst bei Dichten von $\approx 0.5\rho_0$ erzeugt. An dieser Stelle soll bemerkt werden, daß alle beobachteten Pionen im Mittel erst unterhalb der Saturationsdichte von Kernmaterie ρ_0 ausfrieren.
Aufgrund der linearen Abhängigkeit der mittleren Dichte, bei der die Pionen produziert werden, vom Pionenimpuls folgt, daß das Coulomb-Potential, das zum Zeitpunkt des Ausfrierens auf die Pionen wirkt, ebenfalls linear mit dem Impuls der Pionen zunimmt, weil die elektrische Ladungsdichte proportional zur Baryonendichte ist. Dieses lineare Verhalten ist in der Tat im Rahmen der CBUU-Transportrechnungen zu beobachten, wie Abbildung 7.4 zeigt. In dieser Abbildung ist das Coulomb-Potential V_{coul}, dem die die Reaktionszone verlassenden Pionen zum Zeitpunkt ihrer Produktion ausgesetzt sind, wiederum für die Reaktion $Au + Au$ bei 1.0 AGeV als Funktion des Pionenimpulses im Schwerpunktsystem der Reaktion dargestellt. Im oberen Teil der Abbildung ist V_{coul} sowohl für die positiv geladenen Pionen (offene Kreise) als auch für die negativ geladenen Pionen (offenen Dreiecke) separat dargestellt. Die ausgefüllten Vierecke korrespondieren zu V_{coul} gemittelt über positiv und negativ geladene Pionen. Die durchgezogene Linie entspricht dem Ergebnis einer linearen Regression, die mit

diesen Mittelwerten durchgeführt wurde. Man erkennt deutlich ein lineares Anwachsen von V_{coul} mit zunehmenden Pionenimpulsen für Pionenimpulse größer als 0.2 GeV/c. Im unteren Teil von Abbildung 7.4 wird untersucht, wie sich die Coulomb-Effekte auf die Pionen als Funktion der Zentralität der Schwerionenreaktion verändern: die gefüllten Vierecke und Kreise stellen das mittlere Coulomb-Potential V_{coul} als Funktion des Pionenimpulses für periphere bzw. zentrale Ereignisse dar. Die durchgezogene und die gestrichelte Linie geben wieder die entsprechenden linearen Fits an die Resultate der CBUU-Rechnungen an. Man erkennt, daß die Coulomb-Effekte auf die Spektren geladener Pionen von der Zentralität der Schwerionenkollision beeinflußt werden. Pionen, die in peripheren Kollisionen erzeugt werden, erfahren ein um $\approx 10\%$ stärkeres Coulomb-Potential als Pionen aus zentralen Reaktionen. Dieses Verhalten läßt sich wie folgt erklären: Im Fall zentraler Schwerionenkollisionen nehmen fast alle Nukleonen von Target und Projektil an der Reaktion teil. Es kommt zur Ausbildung eines Feuerballs, der sich während der Reaktion ausbreitet. Das Coulomb-Potential, das auf die Pionen wirkt, die die Reaktionszone verlassen, wird somit von einer homogenen Baryonenverteilung generiert, deren Dichte weit unterhalb von ρ_0 liegt. Je peripherer eine Schwerionenreaktion wird, desto weniger Nukleonen nehmen direkt an der Reaktion teil. Die Nukleonen, die nicht an der Reaktion teilnehmen bilden die sog. Spektatorenmaterie. Diese Materie hat eine Dichte von etwa ρ_0, und somit ist das von ihr generierte Coulomb-Potential stärker als jenes, das in der Endphase zentraler Kollisionen vorliegt.

Bisher wurde in diesem Abschnitt eine Korrelation zwischen den Impulsen von in Schwerionenkollisionen emittierten Pionen und deren durchschnittlicher Produktionszeit bzw. -dichte etabliert. Dabei hat sich gezeigt, daß die Pionen im Mittel nach der Hochdichtephase einer Reaktion entstehen und somit ein Sonde zur Untersuchung der Expansionsphase einer Schwerionenreaktion darstellen. Offensichtlich stellen die Ausfrierzeiten der Pionen und die Dichten, bei denen die Pionen produziert werden, keine experimentell zugänglichen Observablen dar. Es ist aber möglich, durch Vergleich der Spektren von π^+ und π^- die Coulomb-Effekte auf die Pionen in verschiedenen kinematischen Bereichen zu untersuchen und somit indirekt Rückschlüsse auf die Expansionsphase einer Schwerionenkollision zu ziehen. Dieses Ziel kann erreicht werden, indem man das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für π^-- und π^+-Produktion untersucht. Dieses Verhältnis

$$R = \frac{\sigma(\pi^-)}{\sigma(\pi^+)} \tag{7.1}$$

ist in Abbildung 7.5 für die Reaktion $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion abgebildet. Der obere Teil der Abbildung zeigt R für eine CBUU-Transportrechnung ohne Coulomb-Effekte. Abgesehen von statistischen Schwankungen erhält man über den gesamten Bereich der kinetischen Energie der Pionen ein konstantes Verhältnis R ($\approx 1.85 \pm 0.1$). Das konstante Verhältnis R reflektiert die Tatsache, daß die Pionen die Reaktionszone als freie Teilchen verlassen und somit die π^+- und die π^--Spektren nicht relativ zueinander verschoben werden. R weicht aufgrund der Isospinasymmetrie des $Au + Au$-Systems vom Wert 1 ab.

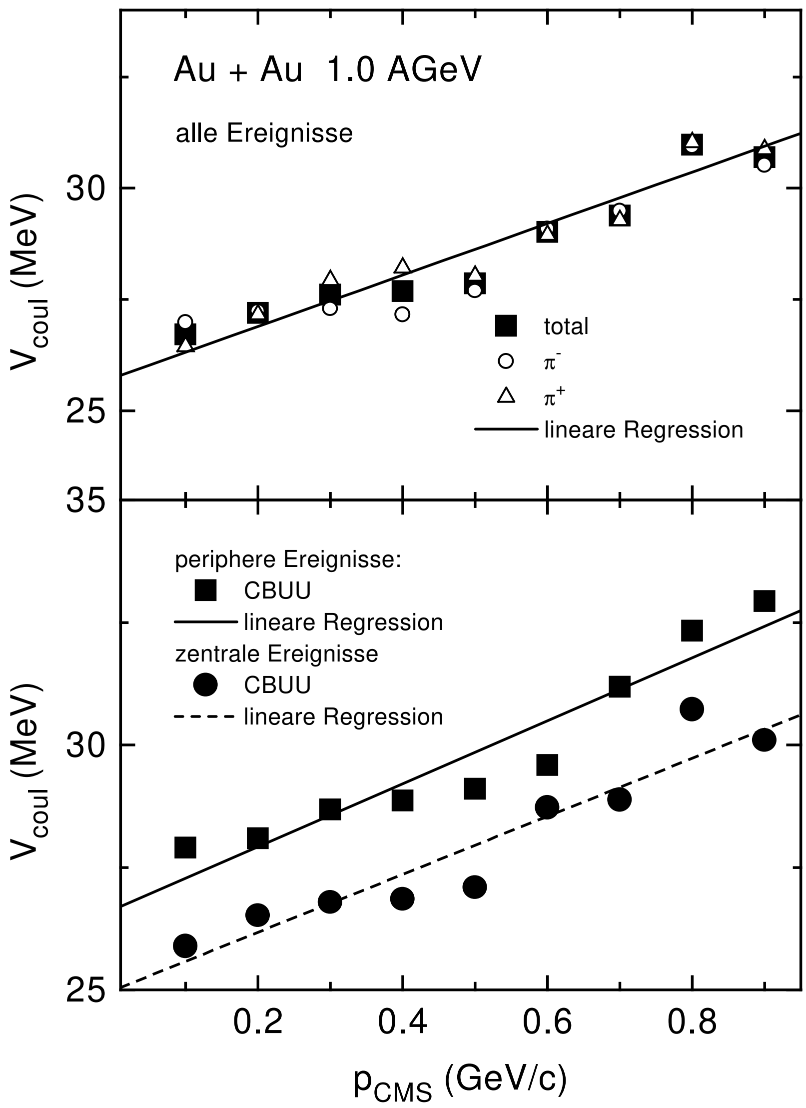

Abbildung 7.4: Das mittlere Coulomb-Potential V_{coul}, dem die Pionen zum Zeitpunkt ihrer Produktion ausgesetzt sind, als Funktion des CMS-Impulses der Pionen für $Au + Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV. Oben: die offenen Kreise repräsentieren V_{coul} für π^- und die offenen Dreiecke korrespondieren zu V_{coul} für π^+. Die ausgefüllten Vierecke entsprechen dem Potential, das aus Mittelung über die Coulomb-Potentiale von π^+ und π^- hervorgeht. Die durchgezogene Linie entspricht einem linearen Fit an diese Mittelwerte. Für diese Darstellung wurden alle Ereignisse ($0 \leq b \leq 16$ fm) verwendet. Unten: Die Vierecke und Kreise entsprechen dem über π^+ und π^- gemittelten Coulomb-Potential für zentrale ($0 \leq b \leq 6$ fm) bzw. für periphere ($6 > b \leq 16$ fm) Ereignisse. Die durchgezogene und die gestrichelte Linie repräsentieren die entsprechenden linearen Fits an die Ergebnisse der Transportrechnung.

Stock et al. [85] erhalten im Rahmen eines einfachen Modells

$$R = \frac{5N^2 + NZ}{5Z^2 + NZ}, \tag{7.2}$$

wobei N und Z die Zahl der an der Reaktion teilnehmenden Neutronen bzw. Protonen repräsentieren. Der Ausdruck (7.2) ergibt sich unter der Annahme, daß alle Pionen aus dem Zerfall der $\Delta(1232)$-Resonanz stammen. Ferner wird angenommen, daß jedes Tagetnukleon mit jedem Projektilnukleon kollidiert. Es kommt also zu N^2 Neutron-Neutron, Z^2 Proton-Proton und $2NZ$ Proton-Neutron-Kollisionen. Die Ladungszustände der in diesen Kollisionen produzierten $\Delta(1232)$ werden mit den entsprechenden Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmt. Das Verhältnis R ergibt sich aus den entsprechenden Koeffizienten für den Zerfall der $\Delta(1232)$-Resonanz in ein Pion und ein Nukleon. Aus Gleichung (7.2) erhält man im Fall einer $Au + Au$-Kollision mit $R = 1.948$ einen Wert, der circa 5% über dem im Rahmen des CBUU-Modells erzielten Wert liegt.
Im unteren Teil von Abbildung 7.5 ist das aus einer kompletten CBUU-Rechnung, also einschließlich der Coulomb-Effekte, resultierende R wiederum für dasselbe System dargestellt. Hier wird eine Energieabhängigkeit von R deutlich. Für kinetische Energien von $\approx$ 50 MeV ergibt sich $R \approx 3.0$. Mit zunehmender kinetischer Energie sinkt das π^-/π^+-Verhältnis auf einen Wert von $\approx$ 0.8 und bleibt für kinetische Energien oberhalb von 300 MeV im Rahmen der statistischen Schwankungen konstant. Da die Rechnungen, die zum oberen bzw. unteren Teil von Abbildung 7.5 führten, bis auf die Coulomb-Effekte identisch sind, folgt, daß die Energieabhängigkeit des π^-/π^+-Verhältnisses R durch das Coulomb-Potential verursacht wird. Damit wurde verifiziert, daß es sich beim Verhältnis R um eine experimentelle Observable handelt, die sensitiv auf das Coulomb-Potential und damit auf die Dichteverteilung in der Expansionsphase einer Schwerionenreaktion ist.

7.2 Sensitivität des π^-/π^+-Verhältnisses auf die Geometrie von Schwerionenreaktionen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Unterschiede im Coulomb-Potential, die aufgrund der verschiedenen Ausfrierdichten der Pionen entstehen, die Ursache für die Energieabhängigkeit des π^-/π^+-Verhältnisses R sind. Im folgenden wird die Sensitivität von R auf die Reaktionsgeometrie von Schwerionenkollisionen untersucht.
In Abbildung 7.6 ist das Verhältnis R für die Reaktion $Au+Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem (CMS) für verschiedene Emissionswinkel im CMS dargestellt. Die durchgezogene Linie korrespondiert zum Verhältnis R integriert über alle Winkel, während die gestrichelte, die gepunktete und die strichpunktierte Linie das resultierende π^-/π^+-Verhältnis für $\Theta_{CMS} = 0^o \pm 22.5^o$, $\Theta_{CMS} = 45^o \pm 22.5^o$ bzw. $\Theta_{CMS} = 90^o \pm 22.5^o$ angegeben. Für weiche Pionen wird unter Vorwärtswinkeln ein großes R, das für kinetische Energien im Bereich von 100 MeV Werte von ≈ 5.0 erreicht, beobachtet. Für die anderen Winkelbereiche werden für weiche Pionen hingegen nur R im Bereich von 1.5 bis 2.5 erreicht.

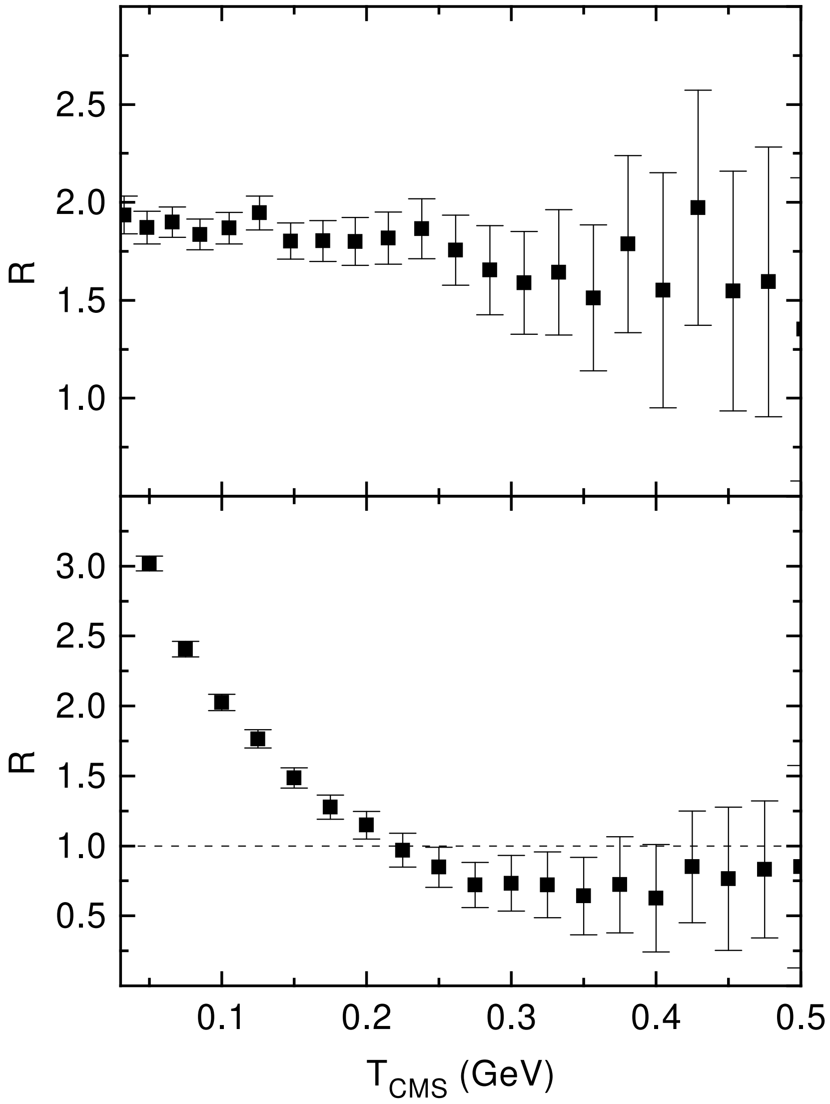

Abbildung 7.5: Das π^-/π^+-Verhältnis R für die Reaktion $Au+Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion. Oben: Das in einer Rechnung ohne Coulomb-Effekte erhaltene Verhältnis R. Unten: Das Ergebnis einer kompletten CBUU-Rechnung einschließlich der Coulomb-Effekte.

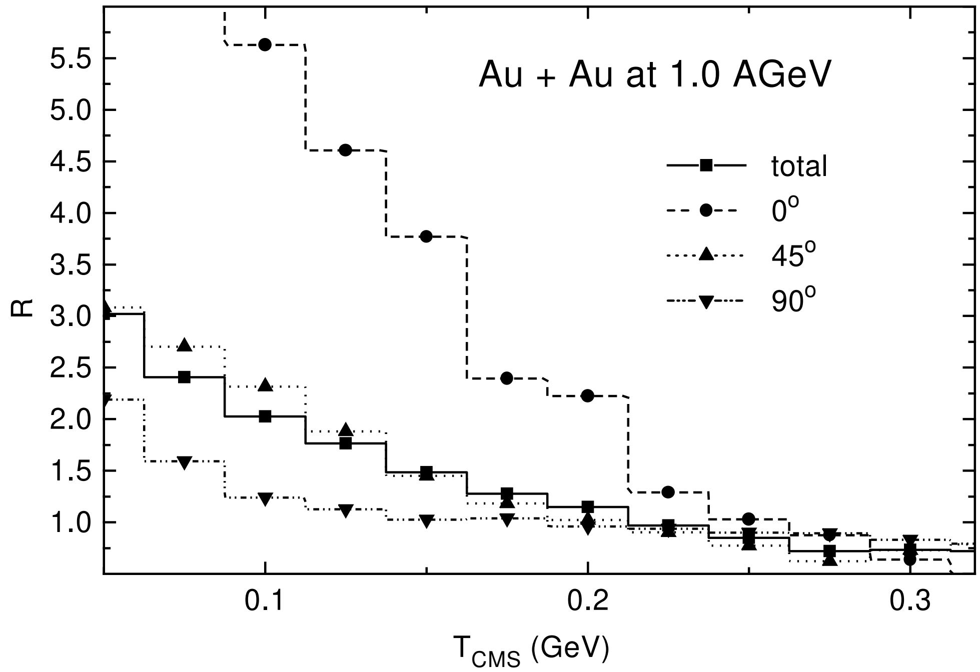

Abbildung 7.6: Das π^-/π^+-Verhältnis R für die Reaktion $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im CMS für verschiedene CMS-Winkel: $\Theta_{CMS} = 0^o \pm 22.5^o$ gestrichelte Linie, $\Theta_{CMS} = 45^o \pm 22.5^o$ gepunktete Linie und $\Theta_{CMS} = 90^o \pm 22.5^o$ strichpunktierte Linie. Die durchgezogene Linie entspricht R integriert über alle Winkel.

Dieser große Unterschied in R wird mit zunehmender kinetischer Energie der Pionen immer kleiner und ist für kinetische Energien von ≈ 250 MeV fast verschwunden. Die Winkelabhängigkeit von R kann im Rahmen des Spektatoren-Partizipanten-Bildes verstanden werden (s. Abbildung 7.7). Im oberen Teil von Abbildung 7.7 ist die Endphase einer Schwerionenkollision, wie sie im Spektatoren-Partizipanten-Modell verstanden wird, dargestellt. In zentralen Schwerionenkollisionen nehmen - unter der Voraussetzung, daß Target und Projektil vergleichbare Masssenzahlen haben - fast alle Target- und Projektilnukleonen an der Reaktion teil (Partizipanten). In der Hochdichtephase der Reaktion wird ein heißer Feuerball bestehend aus komprimierter baryonischer Materie gebildet, der sich in der Expansionsphase nach allen Richtungen ausdehnt. Am Ende der Reaktion liegt dann baryonische Materie mit Dichten, die wesentlich kleiner als ρ_0 sind, vor. In peripheren Reaktionen (s. Abbildung 7.7 unten) nehmen hingegen nicht alle Target- und Projektilnukleonen an der Reaktion teil. Nur diejenigen Nukleonen, die sich im Bereich des geometrischen Überlapps von Target und Projektil befinden, nehmen teil und bilden einen, im Vergleich zur zentralen Kollision, kleineren Feuerball, der sich anschließend ausdehnt. Die anderen Nukleonen, die sogenannten Spektatoren, bewegen sich ungestört weiter. Diese am Ende der Reaktion vorliegenden Target- und Projektilreste haben wesentlich höhere Dichten als die sich isotrop ausdehnende baryonische Materie in zentralen Kollisionen und generieren somit ein relativ starkes Coulomb-Potential.
Das extrem hohe π^-/π^+-Verhältnis für weiche Pionen, die sich in Vorwärts- bzw. Rückwärtsrichtung ($\Theta_{CMS} = 0^o \pm 22.5^o$) bewegen, erklärt sich dadurch, daß sich diese Pionen parallel zu den Spektatoren bewegen und sich somit für längere Zeit im

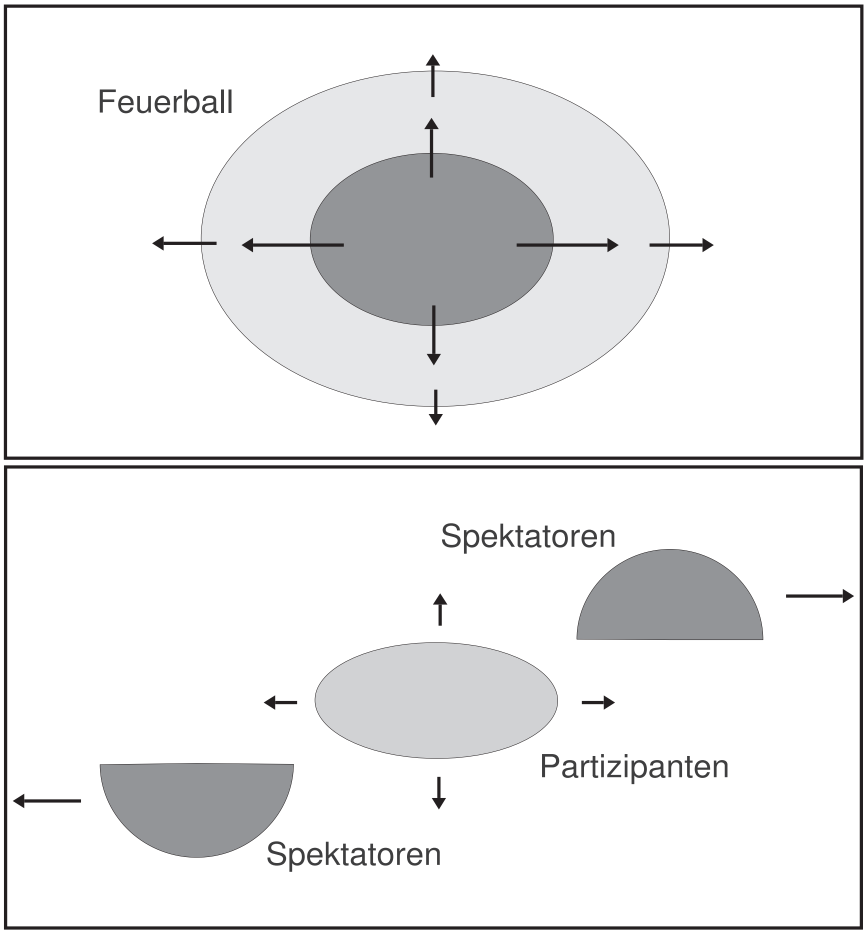

Abbildung 7.7: Schwerionenkollisionen im Spektatoren-Paritzipanten-Modell. Oben: Das Ende einer zentralen, massensymmetrischen Kollision. In der Hochdichtephase (dunkelgrau) hat sich ein Feuerball aus hadronischer Materie ausgebildet, der sich in der Expansionsphase ausdehnt (Pfeile). Am Ende der Reaktion liegt hadronische Materie mit einer Dichte unterhalb von ρ_0 vor (hellgrau). Unten: In einer peripheren Kollision bilden die Partizipanten einen sich ausdehnenden Feuerball (hellgrau), während die Spektatoren (dunkelgrau) nicht an der Reaktion teilnehmen und sich unbeeinflußt weiterbewegen.

Coulomb-Feld der Spektatoren aufhalten. Somit erfahren diese Pionen größere Einflüsse des Coulomb-Potentials als Pionen, die in andere Richtungen emittiert werden. Die soeben entwickelten Argumente werden durch Abbildung 7.8 noch untermauert. In dieser Abbildung ist R wiederum für $Au + Au$ bei 1.0 AGeV für drei Winkelbereiche (oben: $\Theta_{CMS} = 0^o \pm 22.5^o$, Mitte: $45^o \leq \Theta_{CMS} \leq 135^o$ und unten: integriert über alle Winkel) als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im CMS dargestellt. Die durchgezogenen Histogramme wurden unter Berücksichtigung aller Stoßparameter ($0 \leq b \leq 16$ fm) erhalten, die gestrichelten bzw. gepunkteten Histogramme ergeben sich für periphere ($6 < b \leq 16 fm$) bzw. zentrale ($0 \leq b \leq 6$ fm) Ereignisse. Vergleicht man die drei Ereignisklassen im oberen Teil der Abbildung 7.8, so erkennt man eine starke Abhängigkeit des Verhältnisses R von der Zentralität der Schwerionenreaktion, die sich entsprechend der Stoßparameterabhähnigkeit des mittleren Coulomb-Potentials, dem die Pionen bei der Produktion ausgesetzt sind, verhält (vergl. Abbildung 7.4). Für weiche Pionen aus peripheren Kollisionen ergibt sich ein wesentlich größeres R als für langsame Pionen aus zentralen Kollisionen. Der Unterschied zwischen peripheren und zentrale Kollisionen wird mit zunehmender kinetischer Energie der Pionen immer geringer. Das Verhalten von R als Funktion der Zentralität der Schwerionenreaktion ist für weiche Pionen, die im Winkelbereich von $\Theta_{CMS} = 45^o$ bis $\Theta_{CMS} = 135^o$ emittiert werden, gerade umgekehrt. Hier ist R für zentrale Kollisionen größer als für periphere Reaktionen. Allerdings sind die Unterschiede in R bei weitem nicht so ausgeprägt wie für Pionen, die in Vorwärts- bzw. Rückwärtsrichtung emittiert werden. Dieses Verhalten kann ebenfalls im Rahmen des Spektator-Partizipant-Modells verstanden werden: Da sich die Spektatoren in peripheren Kollisionen in Target- und Projektilrichtung bewegen, verläßt ein großer Teil der baryonischen Materie (und damit der elektrischen Ladung) die Reaktionszone. Dies hat zur Folge, daß Pionen, die sich senkrecht zur Strahlachse bewegen, in peripheren Kollisionen ein schwächeres Coulomb-Potential erfahren als Pionen aus zentralen Kollisionen. Integriert man über alle Winkel, so ist im Rahmen der statistischen Unsicherheiten, mit denen die Rechnungen behaftet sind, keine Stoßparameterabhängigkeit von R zu erkennen, wie der untere Teil der Abbildung 7.8 zeigt.

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen nun die im Rahmen des CBUU-Modells bestimmten π^-/π^+-Verhältnisse R für das System $Au + Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV mit experimentellen Daten verglichen werden. Dieses Verhältnis wurde/wird von der KaoS-Kollaboration am Beschleuniger SIS der GSI vermessen.
Die inklusiven π^+-Spektren für $Au + Au$ wurden von der KaoS-Kollaboration [86] veröffentlicht. Ein Vergleich der CBUU-Rechnungen mit diesen Spektren befindet sich in Kapitel 8. Mit dem KaoS-Spektrometer werden die Pionenspektren unter Laborwinkeln von $\Theta_{lab} = 44^o \pm 4^o$ und $\Theta_{lab} = 86^o \pm 4^o$ gemessen. In Abbildung 7.9 sind die entsprechenden im Rahmen des CBUU-Modells erhaltenen Verhältnisse R (Vierecke) dargestellt. Der obere Teil zeigt R über alle Winkel integriert. Im mittleren Teil der Abbildung ist das π^-/π^+-Verhältnis für die Laborwinkel $\Theta_{lab} = 45^o \pm 20^o$ im Vergleich zu den experimentellen Daten [83] (Dreiecke) angegeben. Der untere Teil der Abbildung zeigt das berechnete π^-/π^+-Verhältnis für Laborwinkel $\Theta_{lab} = 90^o \pm 20^o$. Die Fehlerbalken indizieren die statistischen Fehler der Rechnung. Aufgrund des großen CPU-Zeit-Aufwands war es nicht möglich, in der Transportrechnung dieselben Winkel-

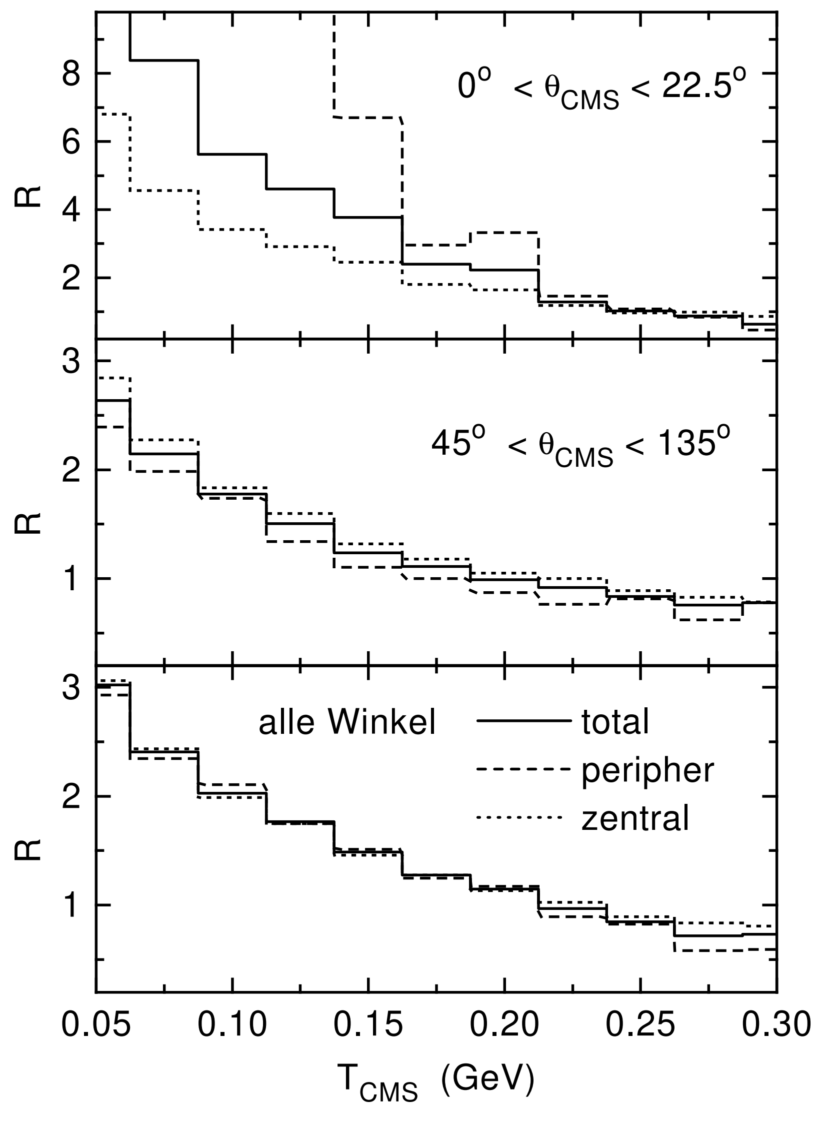

Abbildung 7.8: Das Verhältnis R für die Reaktion $Au+Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV für alle (durchgezogene Histogramme), periphere ($6 < b \leq 16$ fm, gestrichelte Histogramme) und zentrale ($0 \leq b \leq 6$ fm, gepunktete Histogramme) Ereignisse als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im CMS. Oben: Für Pionen, die unter $\Theta_{CMS} = 0^o \pm 22.5^o$ emittiert werden. Mitte: Für Pionen, die die Reaktionszone in einem Winkelbereich von $45^o \leq \Theta_{CMS} \leq 135^o$ verlassen. Unten: Integriert über alle Winkel.

cuts wie im Experiment zu verwenden.
Aus dem mittleren Teil der Abbildung ergibt sich, daß der Verlauf von R als Funktion der kinetischen Eenrgie zwar qualitativ richtig wiedergegeben wird, jeoch liegt das im Rahmen des CBUU-Modells bestimme π^-/π^+-Verhältnis deutlich unter den experimentell bestimmeten Werten für R. Dies bedeutet, daß in den Transportrechnungen die Coulomb-Effekte auf die Pionen überschätzt werden. Eine mögliche Ursache hierfür könnte in der Behandlung des Coulomb-Potentials als Mittleres-Feld-Potential liegen. An dieser Stelle soll noch bemerkt werden, daß die hier vorgestelten π^-/π^+-Verhältnisse qualitativ mit einer Rechnung von Bao-An Li [84] übereinstimmen. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit berechneten Verhältnisse liegen jedoch für kinetische Energien oberhalb von 0.15 GeV um $\approx 10\%$ unter den π^-/π^+-Verhältnissen aus [84].

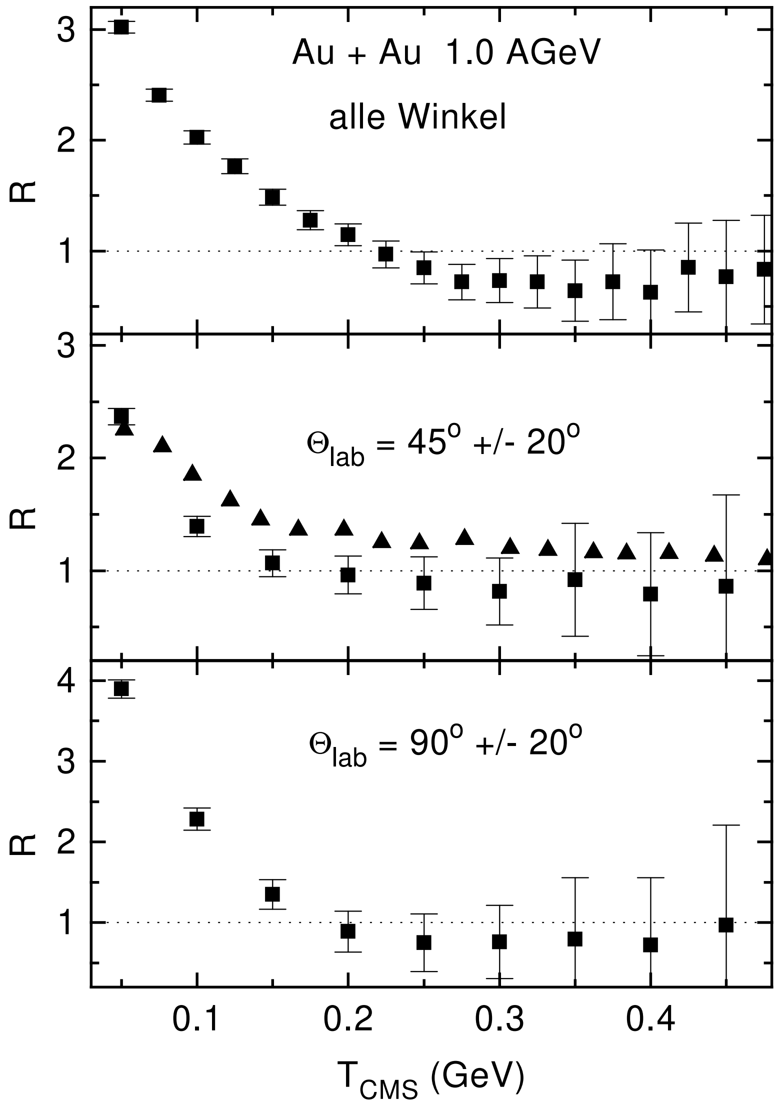

Abbildung 7.9: Das π^-/π^+-Verhältnis für das System $Au+Au$ bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion. Oben: R integriert über alle Winkel. Mitte: Für einen Laborwinkelbereich von $25^o \leq \Theta_{lab} \leq 65^o$. Unten: Für einen Laborwinkelbereich von $70^o \leq \Theta_{lab} \leq 110^o$. Die Fehlerbalken geben die statistischen Fehler der Rechnung an. Die Dreiecke im mittleren Teil der Abbildung geben die experimentellen Daten der KaoS-Kollaboration für $40^o \leq \Theta_{lab} \leq 48^o$ [83] an.

Kapitel 8

Vergleich mit experimentellen Daten zur π-Produktion

In diesem Kapitel werden die im Rahmen des CBUU-Modells gewonnenen Resultate zur π-Produktion in Schwerionenkollisionen mit experimentellen Daten verglichen. Zuerst wird die π^--Produktion in $Ar + KCl$ Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.8 AGeV untersucht. Dieses System wurde in den 80'er Jahren am BEVALAC-Beschleuniger in Berkeley vermessen. Im zweiten Teil dieses Kapitels wird mit Daten zur π^+-Produktion der KAOS-Kollaboration und mit π^0-Daten der TAPS-Kollaboration verglichen.
Alle Rechungen, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, wurden unter Vewendung des explizit impulsabhängigen Mittleren-Feld-Potentials MMD (s. Tabelle 3.1 in Kapitel 3.3.2) durchgeführt. Zur Simulation der $Ca + Ca$- und $Au + Au$-Kollisionen wurden jeweils 1000 bzw. 200 Testteilchen pro Nukleon verwendet.

8.1 π^--Produktion in $Ar + KCl$ bei 1.8 AGeV

In diesem Abschnitt werden die in CBUU-Transportrechnungen erhaltenen Ergebnisse für die Reaktion $Ar+KCl$ bei einer Einschußenergie von 1.8 AGeV mit experimentellen Daten aufgenommen am BEVALAC-Beschleuniger verglichen [85].
In der experimentelle Analyse wird zwischen zwei Ereignisklassen unterschieden:

- zentrale Ereignisse
- 'minimum bias' Ereignisse

Zum Vergleich mit den 'minimum bias' Daten werden CBUU-Ereignisse aller Stoßparameter (0 fm $\leq b \leq$ 9 fm) herangezogen. Die zu den zentralen Ereignissen korrespondierenden CBUU-Ereignisse werden im Vergleich mit den Daten für das transversale Impulsspektrum $d\sigma/dp_T$ wie folgt gewonnen: Der inklusive Wirkungsquerschnitt für die Produktion von Pionen ergibt sich aus der Integration der π-Multiplizitäten $n(b)$ über alle Stoßparameter b,

$$\frac{d\sigma}{dp_T} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dn(b)}{dp_T}\, bdb. \tag{8.1}$$

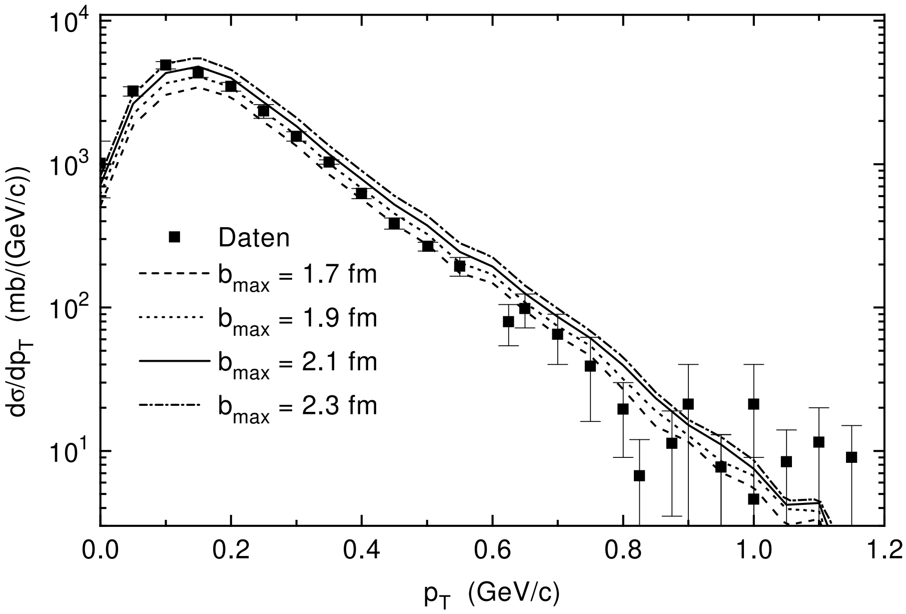

Abbildung 8.1: Der π^--Wirkungsquerschnitt für verschiedene Klassen zentraler Ereignisse als Funktion des transversalen Impulses p_T. Die Vierecke repräsentieren die experimentellen Daten aus [85], während die Linien zu CBUU-Rechnungen mit verschiedenen maximalen Stoßparametern b_{max} korrespondieren: durchgezogene Linie $b_{max} = 2.1$ fm, gestrichelte Linie $b_{max} = 1.7$ fm, gepunktete Linie $b_{max} = 1.9$ fm und strichpunktierte Linie $b_{max} = 2.3$ fm.

Der Klasse der zentralen Ereignisse gehören Ereignisse mit Stoßparametern im Bereich von 0 fm bis zu einem maximalen Stoßparameter b_{max} an, wobei b_{max} durch Anpassung an die zentralen $d\sigma/dp_T$-Daten bestimmt wird. In Abbildung 8.1 sind die im Rahmen des CBUU-Modells bestimmten Wirkungsquerschnitte für b_{max} zwischen 1.6 und 2.3 fm als Funktion des Transversalimpulses der Pionen im Vergleich zu den experimentellen Daten [85] dargestellt. Man erkennt, daß sich die Form des p_T-Spektrums nicht ändert, wenn b_{max} zwischen 1.7 und 2.3 fm variiert wird. Wird b_{max} erhöht, so tragen nach Gleichung (8.1) mehr Ereignisse zum Wirkungsquerschnitt bei und das Spektrum wird zu größeren Werten hin verschoben. Da das integrierte Spektrum für $b_{max} = 2.1$ fm gut reproduziert wird, werden im folgenden CBUU-Ereignisse mit $0 \leq b \leq 2.1$ fm für den Vergleich mit Daten aus zentralen Ereignissen verwendet.
Aus Abbildung 8.1 ergibt sich ferner, daß die spektrale Form der Daten über den gesamten Impulsbereich recht gut wiedergegeben wird. Abweichungen ergeben sich für Transversalimpulse zwischen 0.3 und 0.55 GeV/c, wo die die Daten überschätzt werden. Wie in Abbildung 8.2 dargestellt, wird auch für das zentrale $Ed\sigma/dE$-Spektrum als Funktion der kinetischen Energie im Schwerpunktsystem der Reaktion generell eine gute Übereinstimmung mit den Daten gefunden. Lediglich für kinetische Energien kleiner als ≈ 75 MeV werden die experimentellen Daten überschätzt. In Abbildung 8.3 werden schließlich die CBUU-Rechnungen für ein doppelt differentielles π^- Spektrum als Funktion der CMS-Energie der Pionen mit den experimentellen Daten verglichen. Die Daten [85] werden durch die Vierecke dargestellt und das Histogramm korrespondiert zu den Ergebnissen der Transportrechnung in Einheiten von $mb/GeV/sr$ skaliert mit einem Faktor von 1.9. Die schraffierten Bereiche geben die statistischen Fehler der

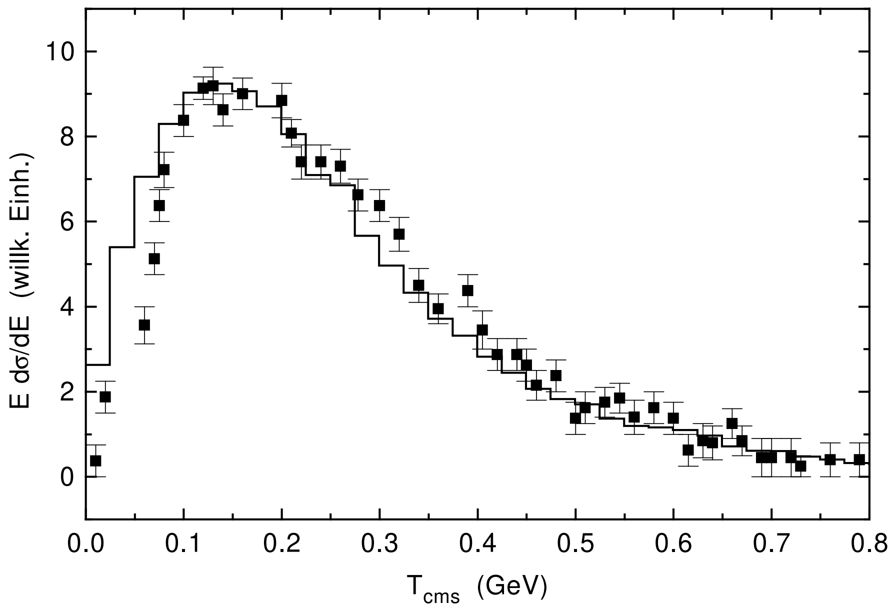

Abbildung 8.2: Differentieller π^--Wirkungsquerschnitt $E\frac{d\sigma}{dE}$ für zentrale Ereignisse (b_{max} = 2.1 fm) als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion. Die Vierecke repräsentieren die experimentellen Daten aus [85] und das Histogramm stellt das Ergebnis der Transportrechnung dar.

Rechnung an. Für dieses Spektrum wird ebenfalls im Rahmen der statistischen Fehler von Rechnung und Experiment weitgehende Übereinstimmung erzielt. Die Daten im Bereich von 0.4 GeV werden leicht überschätzt.

Nachdem anhand der Abbildungen 8.1 bis 8.3 gezeigt wurde, daß die spektrale Form der Pionenverteilungen durch das CBUU-Modell gut wiedergegeben wird, sollen nun die Winkelverteilungen der Pionen untersucht werden. Dazu ist in Abbildung 8.4 die Zahl der produzierten π^--Mesonen als Funktion von $cos\Theta_{CMS}$ im Vergleich zu den experimentellen Daten [85] dargestellt. Der obere Teil der Abbildung zeigt die inklusive Pionenzahl, d.h. die Pionenzahl für die 'minimum bias' Ereignisklasse ($b_{max} = \infty$). Im unteren Teil ist $dN/dcos\Theta_{CMS}$ für zentrale Ereignisse abgebildet. Die Kreise repräsentieren die experimentellen Daten, während die Ergebnisse der CBUU-Transportrechnung durch die Vierecke dargestellt werden. Die durchgezogenen Linien korrespondieren zu Fits der Form

$$\frac{dN}{dcos\Theta_{CMS}} = const. \times (1.0 + a\, cos^2\Theta_{CMS}) \tag{8.2}$$

an die Rechnungen. Die experimentellen Daten beider Ereignisklassen ('minimum bias' und zentral) werden durch die Rechnungen sehr gut reproduziert. Für die 'minumum bias' Klasse wird aus den Rechnungen ein Anisotropiekoeffizient a von 1.5 extrahiert. Für zentrale Ereignisse sinkt dieser Anisotropiekoeffizient um circa die Hälfte auf ≈ 0.8. Wie bereits in [85] diskutiert, kann die sinkende Anisotropie von 'minimum bias' hin zu zentralen Ereignissen als ein Effekt der Zentralität der Schwerionenkollision verstanden werden: Analog zu Gleichung (8.1) erhält man die Gesamtzahl der Pionen, indem man die Multiplizitäten $n(b)$ mit dem entsprechenden Stoßparameter gewichtet und über alle Stoßparameter integriert. Diese bedeutet, daß in der 'minimum bias'

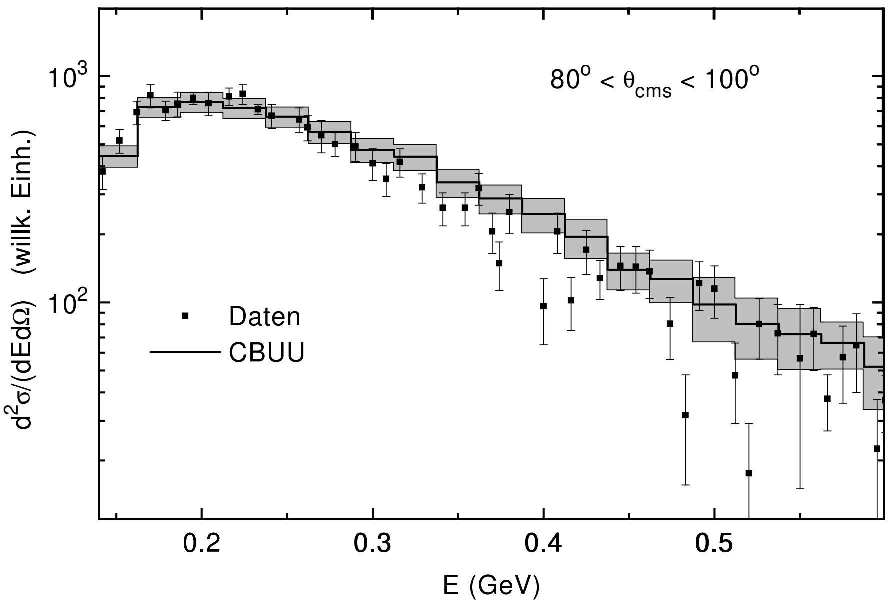

Abbildung 8.3: Doppelt differentieller π^--Wirkungsquerschnitt für zentrale Ereignisse ($b_{max} = 2.1$ fm) als Funktion der Energie der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion für einen Winkelbereich von $80^o \leq \Theta_{CMS} \leq 120^o$. Die Vierecke repräsentieren die experimentellen Daten aus [85] und das Histogramm stellt das Ergebnis der Transportrechnung dar. Die schraffierten Bereiche geben die statistischen Fehler der Rechnung an.

Ereignisklasse die Multiplizitäten semiperipherer und peripherer Reaktionen wesentlich stärker gewichtet werden als die zentraler Schwerionenkollisionen. Weiterhin ist die Wahrscheinlichkeit, daß die in semiperipheren und peripheren Kollisionen produzierten Pionen aus $NN \to N\Delta(1232) \to NN\pi$-Kollisionen der ersten Stoßgeneration stammen, höher als für Pionen aus zentralen Kollisionen. Dies bedeutet, daß die Winkelverteilung des Wirkungsquerschnittes der Reaktion $NN \to N\Delta(1232)$ nicht durch Vielfachstöße 'verschmiert' wird, sondern in der Verteilung der emittierten Pionen zu sehen ist. Hingegen wird in zentralen Schwerionenkollisionen ein Bereich hoher Baryonendichte gebildet. Baryonische Resonanzen werden hauptsächlich in diesem Bereich angeregt, wieder absorbiert, erneut populiert usw. D.h. die Pionen stammen hier zum großen Teil aus Vielfachstößen. Folglich werden Pionen in zentralen Kollisionen isotroper emittiert als in peripheren Kollisionen und somit wird der Anisotropiekoeffizient reduziert.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wird für die zentrale Ereignisklasse der Anisotropiekoeffizient $a(E)$ als Funktion der kinetischen Energie der Pionen untersucht. Dazu wird wie in [85] angenommen, daß der Wirkungsquerschnitt folgende Energieabhängigkeit besitzt,

$$\sigma(E) \sim 1 + a(E)\, cos^2\Theta_{CMS}. \tag{8.3}$$

In Abbildung 8.5 ist $a(E)$ als Funktion der kinetischen Energie der π^--Mesonen im Schwerpunktsystem der Reaktion dargestellt. Die Vierecke korrespondieren zu den CBUU-Ergebnissen, die durch Interpolation der CBUU-Ereignisse für feste kinetische

Energien erhalten wurden. Die Interpolation ist von folgender Form,

$$const. \times (1 + a(E)\, cos^2\Theta_{CMS}), \tag{8.4}$$

und wurde für Ereignisse mit $0.0 \leq \cos\Theta_{CMS} \leq 0.9$ durchgeführt. Die Kreise repräsentieren die experimentellen Daten aus [85]. Die funktionale Form der experimentellen Daten wird durch die Rechnung reproduziert. Die Daten werden allerdings für kinetische Energien oberhalb von 0.15 GeV tendentiell überschätzt. Die CBUU-Rechnung zeigt auch ein Ansteigen des Anisotropieparameters von 0 auf ≈ 2.5 für kinetische Energien bis 0.3 GeV. Oberhalb kinetischer Energien von 0.3 GeV wird eine Zunahme der Isotropie der Pionenverteilung beobachtet. Diese zunehmende Isotropie kann im Rahmen des im CBUU-Modell verwendeten Resonanzbildes verstanden werden: Mit zunehmender kinetischer Energie wächst der Anteil der Pionen, der aus dem Zerfall höher liegender baryonischer Resonanzen stammt (s. Kapitel 6.2). Da diese Resonanzen hauptsächlich durch Vielfachstöße in der Hochdichtephase der Schwerionenreaktion gebildet werden, kommt es im Vergleich zu den Pionen, die in Nukleon-Nukleon-Kollisionen der ersten Stoßgenerationen oder durch den Zerfall der $\Delta(1232)$-Resonanz in Regionen relativ niedriger Dichte produziert werden, zu einer isotroperen Emission.

8.2 π-Produktion bei 1.0 und 1.5 AGeV

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des CBUU-Modells mit neueren Daten zur π-Produktion, die am SIS-Beschleuniger der GSI aufgenommen wurden, verglichen. Begonnen wird mit der π^+-Produktion in $Au + Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV. Dazu ist in Abbildung 8.6 der doppelt differentielle π^+-Wirkungsquerschnitt für Laborwinkel im Bereich zwischen 40^o und 48^o als Funktion des Laborimpulses der π^+ dargestellt. Die Vierecke repräsentieren die experimentellen Daten der KaoS-Kollaboration [86, 87] und das durchgezogene Histogramm korrespondiert zu dem im Rahmen des CBUU-Modells erhaltenen Wirkungsquerschnitt. Die schraffierten Flächen geben die statistischen Fehler der Rechnung an. Für π-Impulse im Bereich zwischen 0.3 und 0.4 Gev/c werden die Daten durch die Rechnungen um bis zu $\approx 35\%$ überschätzt. Für Impulse oberhalb von ≈ 0.4 GeV/c wird im Rahmen der statistischen Fehler der Rechnung Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gefunden.
Bevor dieser Vergleich interpretiert wird, soll zunächst die Produktion neutraler Pionen untersucht werden. Der Wirkungsquerschnitt $1/p_T d\sigma/dp_T$ für die π^0-Produktion ist in Abbildung 8.7 für ein Labor-Rapiditätsintervall von 0.52 bis 0.84 als Funktion des Transversalimpulses p_T gezeigt. Die Rechnungen werden wiederum durch das durchgezogene Histogramm dargestellt. Analog zu Abbildung 8.6 korrespondieren die schraffierten Flächen zum statistischen Fehler der Rechnung und die experimentellen Daten der TAPS-Kolaboration [88, 89] werden durch die Vierecke repräsentiert. Das Verhalten für kleine Transversalimpulse wird durch die Rechnung gut wiedergegeben. Verglichen mit früheren Rechnungen, die im Rahmen eines BUU-Modells durchgeführt wurden [90], sind klare Verbesserungen im Bereich kleiner Transversalimpulse festzustellen. Im Bereich von $p_T \approx 0.2$ GeV/c werden die Daten circa um 10% überschätzt, während die Daten für Impulse oberhalb von 0.3 GeV/c im Rahmen der statistischen Fehler reproduziert werden. Frühere Rechnungen wiesen für hohe transvesale Impulse

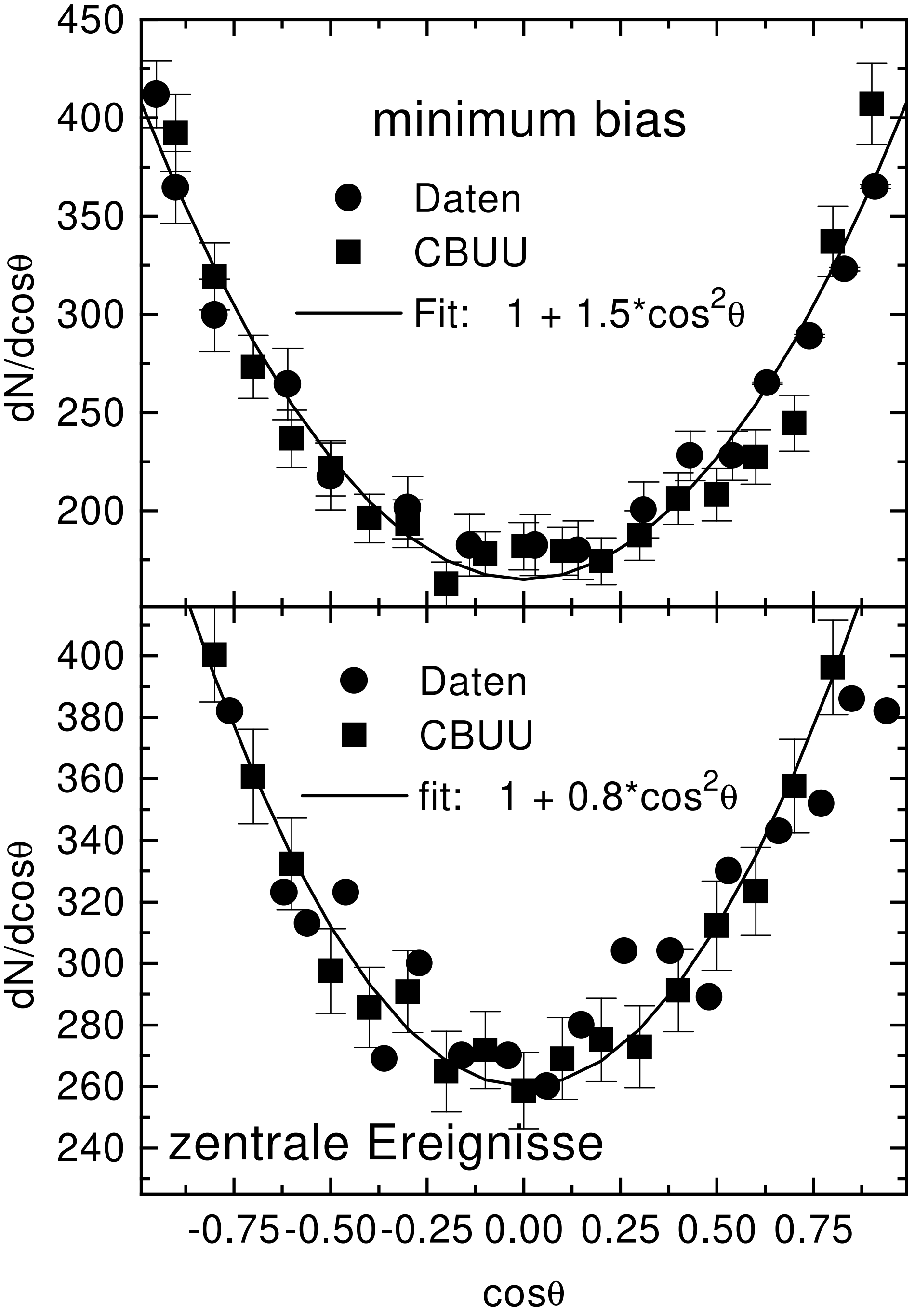

Abbildung 8.4: Zahl der π^--Mesonen als Funktion von $cos\Theta_{CMS}$ für 'minimum bias' (oben) und zentrale (unten) Ereignisse im Schwerpunktsystem der Reaktion. Die experimentellen Daten aus [85] werden durch die Kreise und die Ergebnisse der CBUU-Rechnung durch die Vierecke dargestellt. Die durchgezogenen Linien korrespondieren zu Fits der Form (8.2) an die CBUU-Rechnungen.

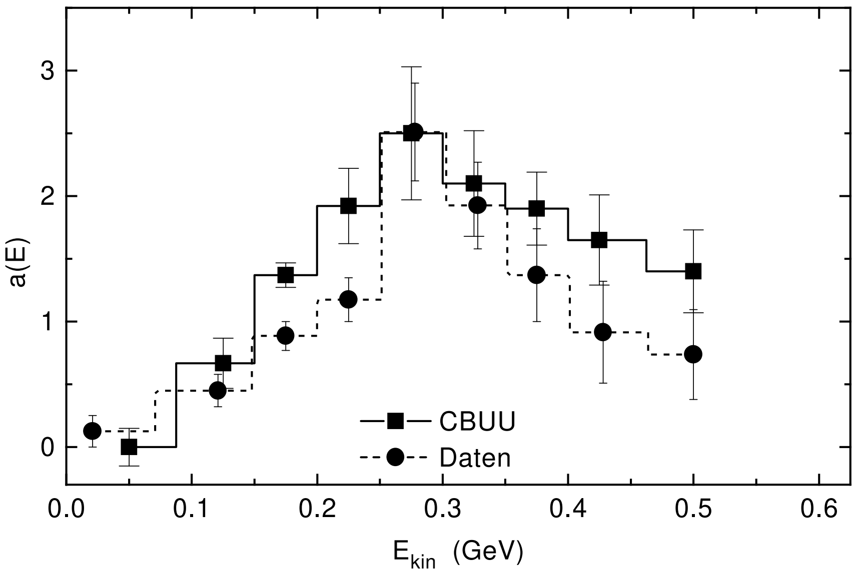

Abbildung 8.5: Der Anisotropieparameter a (s. Text) als Funktion der kinetischen Energie der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion. Die Kreise entsprechen den experimentellen Daten [85]. Die Vierecke wurden durch Interpolation der CBUU-Ergebnisse bei fester kinetischer π^--Energie erhalten. Die Interpolation der Form $const. \times (1 + a(E)\, cos^2\Theta_{CMS})$ wurde für den Bereich $0 \leq cos\Theta_{CMS} \leq 0.9$ durchgeführt.

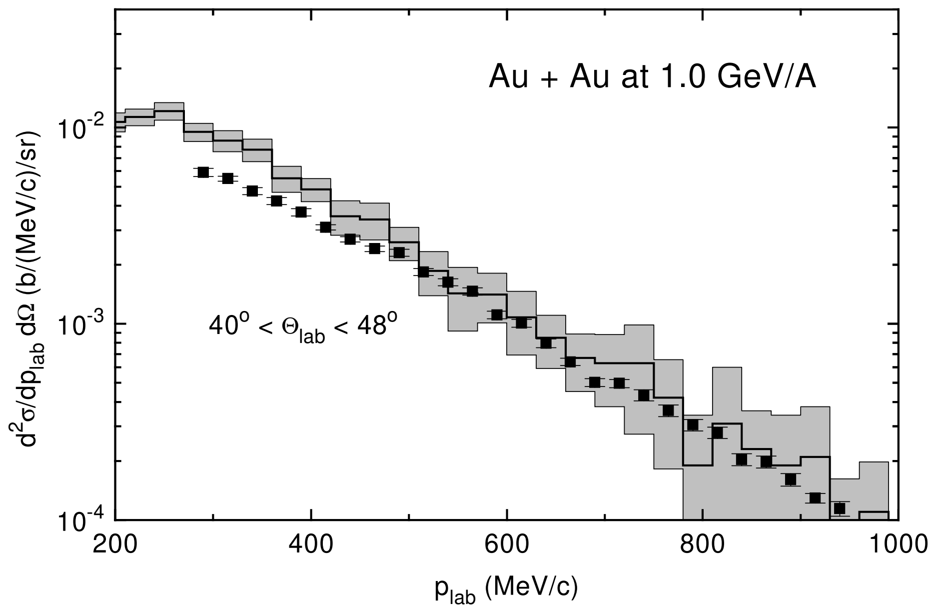

Abbildung 8.6: Doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt für die π^+-Produktion in $Au + Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV unter $40^o \leq \Theta_{lab} \leq 48^o$ als Funktion des π^+-Laborimpulses. Die Rechnung wird durch das durchgezogenen Histogramm repräsentiert. Die schraffierten Flächen korrespondieren zu den statistischen Fehlern der Rechnung und die Vierecke stellen die Daten der KaoS-Kollaboration [86, 87] mit den entsprechenden Fehlerbalken dar.

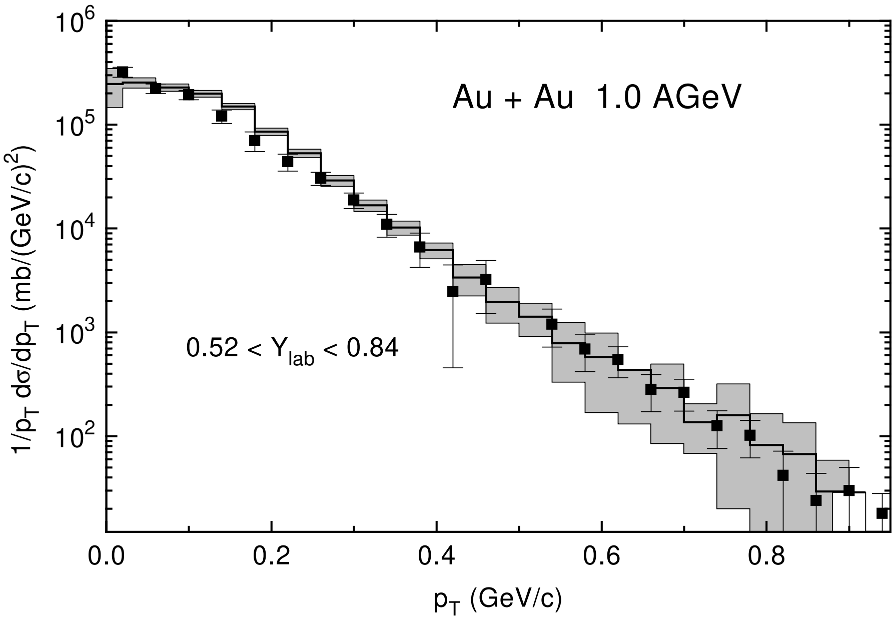

Abbildung 8.7: Wirkungsquerschnitt für die π^0-Produktion in $Au + Au$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV für Labor-Rapiditäten von $0.52 \leq Y_{lab} \leq 0.84$ als Funktion des transversalen Impulses der Pionen. Die Ergebnisse der CBUU-Rechnungen werden durch das durchgezogene Histogramm dargestellt. Die schraffierten Flächen geben die statistischen Fehler der Rechnung an. Die experimentellen Daten der TAPS-Kollaboration [88, 89] sind durch die Vierecke dargestellt.

einen im Vergleich zu den Daten zu hohen Wirkungsquerschnitt auf.
Trägt man die KaoS-Daten ebenfalls als Funktion des transversalen Impulses der Pionen auf, so erkennt man, daß sowohl die TAPS- als auch die KaoS-Daten im Bereich von $p_T \approx 0.2$ GeV/c überschätzt werden. Weiterhin ist festzustellen, daß das Verhalten der hochenergetischen Pionen für beide Datensätze recht gut beschrieben wird.
Neben dem soeben untersuchten System liegen weitere experimentelle Daten der TAPS-Kollaboration zur π^0-Produktion in $Ar + Ca$-Reaktionen bei Einschußenergien von 1.0 und 1.5 AGeV vor. Diese Daten (Vierecke) sind zusammen mit den entsprechenden Rechnungen (durchgezogene Histogramme) in Abbildung 8.8 dargestellt. Die schraffierten Flächen geben wiederum die statistischen Fehler der Rechnung an. Für das System $Ar + Ca$ bei 1.0 AGeV werden die Daten für Transversalimpulse im Bereich von 0.1 bis 0.3 GeV/c wiederum leicht überschätzt. Für transversale Impulse oberhalb von 0.3 GeV/c ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem Experiment und der Rechnung. Im Gegensatz dazu werden die $Ar + Ca$-Daten für 1.5 AGeV über den gesamten Bereich sehr gut reproduziert. Für dieses System stimmt die Rechnung auch für Transversalimpulse im Bereich vom circa 0.2 GeV/c sehr gut mit den Daten überein. Die leichte Überhöhung, die für Einschußenergien von 1.0 AGeV auftritt ist hier nicht zu beobachten.
Wie in Abschnitt 8.1 gezeigt wurde, stimmen die in CBUU-Rechnungen erhaltenen Pionenverteilungen sowohl in der spektralen Form als auch in der Winkelverteilung im Rahmen der statistischen Unsicherheiten mit den BEVALAC-Daten überein.
Die an der GSI aufgenommenen Daten werden ebenfalls zufriedenstellend reproduziert (Abschnitt 8.2). Für Systeme mit Einschußenergien von 1.0 AGeV werden die

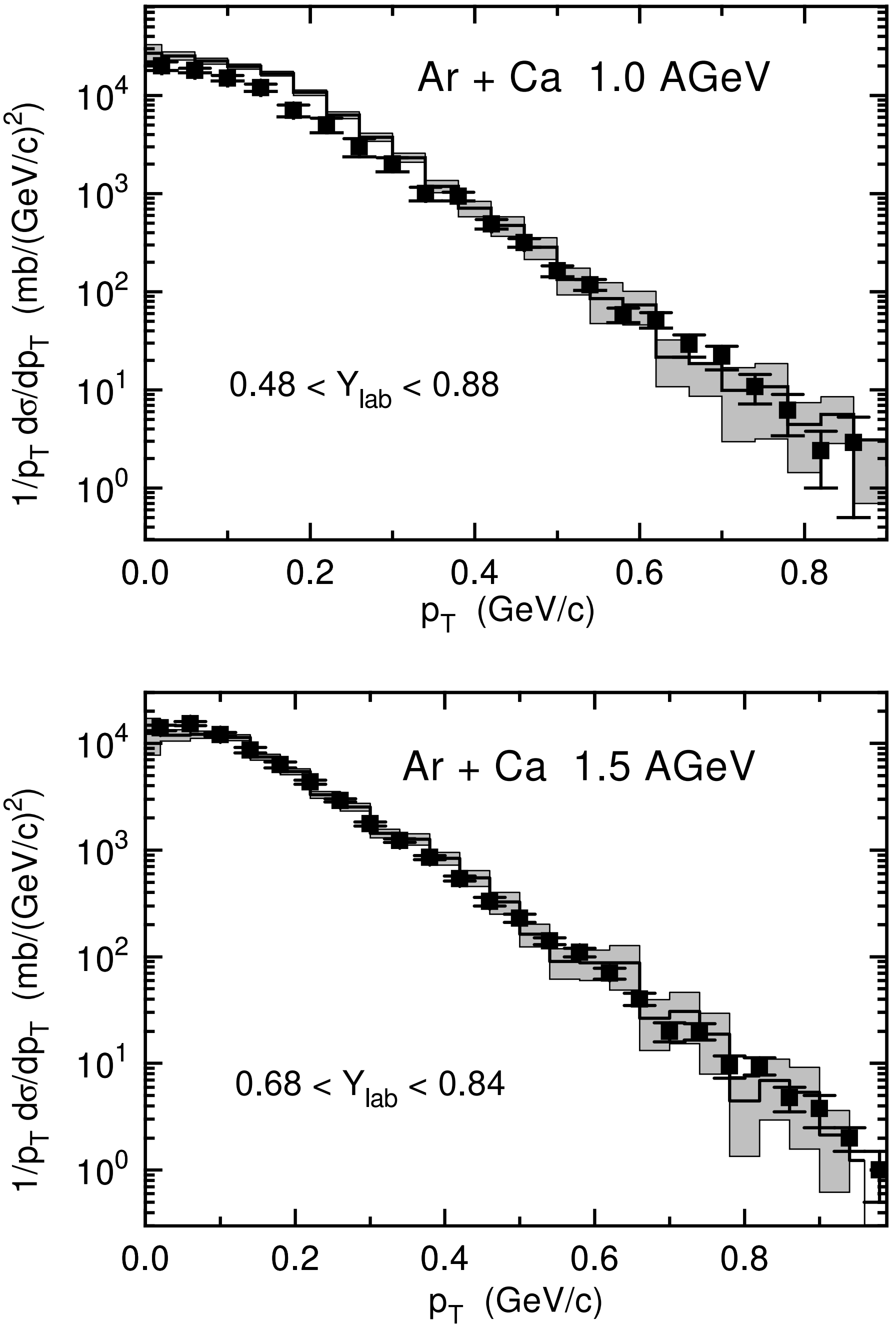

Abbildung 8.8: Wirkungsquerschnitt für die π^0-Produktion in $Ar + Ca$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 (oben) und 1.5 (unten) AGeV für Labor-Rapiditäten von $0.48 \leq Y_{lab} \leq 0.88$ bzw. $0.68 \leq Y_{lab} \leq 0.84$ als Funktion des transversalen Impulses der Pionen. Die Ergebnisse der CBUU-Rechnungen werden durch die durchgezogenen Histogramme dargestellt. Die schraffierten Flächen geben die statistischen Fehler der Rechnungen an. Die experimentellen Daten der TAPS-Kollaboration [88, 89] sind durch die Vierecke dargestellt.

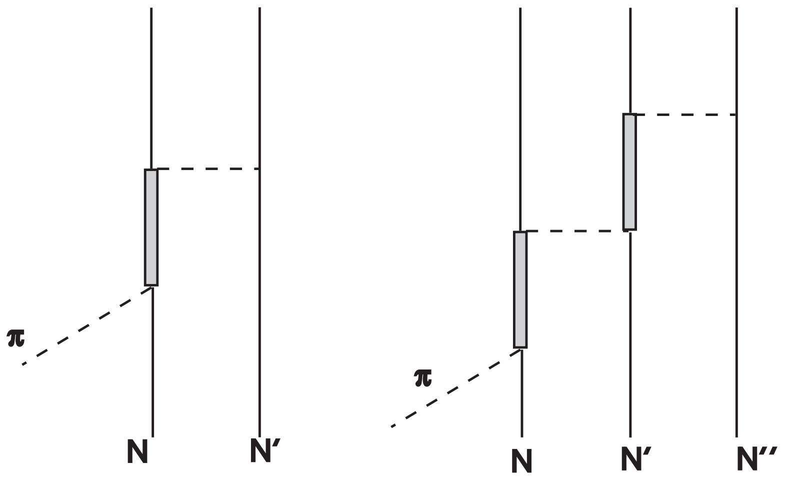

Abbildung 8.9: Feynman-Diagramme zur zur Beschreibung der Absorption von Pionen an zwei (a) und drei (b) Nukleonen.

π-Multiplizitäten für transversale Impulse von ≈ 0.2 GeV/c überschätzt. Pionen in diesem kinematischen Bereich stammen im Wesentlichen aus dem 1π-Zerfall der $\Delta(1232)$-Resonanz (s. Abschnitt 6.2).
Die Wirkungsquerschnitte für hochenergetische Pionen werden für alle Systeme gut reproduziert. Zusammen mit den Analysen aus den Abschnitten 6.2 und 6.4.1 folgt daraus, daß erst die Impulsabhänigkeit des Mittleren-Feld-Potentials der Baryonen und die Beiträge der höheren baryonischen Resonanzen eine korrekte Beschreibung der Produktion hochenergetischer Pionen ermöglichen.

8.3 Diskussion

Nachdem die in den vorangegangenen Abschnitten durchgeführten Vergleiche der Ergebnisse des CBUU-Modells mit experimentellen Daten zur π-Produktion eine zufriedenstellende Übereinstimmung lieferten, sollen an dieser Stelle einige offene Fragen in Bezug auf semiklassische Transportmodelle angesprochen werden.

8.3.1 Mehrkörperprozesse

Im CBUU-Modell werden nur binäre Kollisionen (z.B. $NN \to NN$, $NN \to N\Delta$) berücksichtigt. Da es im Verlauf einer Schwerionenreaktion zur Ausbildung hoher Dichten kommt, sind auch Mehrkörperprozesse denkbar. Inwieweit diese bereits im CBUU-Modell berücksichtig sind, soll im folgenden am Beispiel der Produktion bzw. Absorption von Pionen durch drei Nukleonen kurz erläutert werden.
Die Feynman-Diagramme zur Beschreibung der Pionenabsorption an zwei bzw. drei Nukleonen sind in Abbildung 8.9 angegeben. Die Pionenabsorption an zwei Nukleonen wird im CBUU-Modell entweder durch die direkte Absorption eines Pions an zwei

Nukleonen ($\pi NN \to NN$, Abschnitt 4.7) oder durch die Reaktionsfolge $\pi N \to R$, $RN \to NN$ modelliert (Abbildung 8.9 a). Als Umkehrprozeß der Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen ist diese Art der Pionenabsorption explizit im CBUU-Modell realisiert. Die Pionenabsorption an drei Nukleonen ist - wie auch die Produktion von Pionen in Kollisionen dreier Nukelonen - nicht explizit implementiert. Faßt man das Feynman-Diagramm (b) in Abbildung 8.9 als die Abfolge von Resonanzerzeugung in Pion-Nukleon Stößen ($\pi N \to R$), Streuung der Resonanz an einem Nukelon ($N'R \to N'R$ oder $N''R \to N''R'$) und anschließender Absorption der Resonanz ($RN, R'N \to NN$) auf, so ist die Beschreibung dieser Dreikörperabsorption bereits im CBUU-Modell enthalten. Ebenso ist der dominante Anteil der Dreikörperabsorption, wo sich das erste ausgetauschte Pion auf der Massenschale befindet [91], in folgender Reaktionskette enthalten: $\pi N \to R$, $R \to N\pi$, $\pi N' \to R'$ und $R'N'' \to NN$. Weitergehende Beiträge zur Dreikörperabsorption sind im CBUU-Modell allerdings nicht enthalten.
Da die Absorption von Pionen an drei Nukleonen einer Abhängigkeit von der Baryonendichte $\sim \rho^3$ entspricht, wurde in Arbeiten zur Pionabsorption an Kernen [91] und zur Photoproduktion von Pionen [93] folgende dichteabhängige Modifikation des Wirkungsquerschnittes der Reaktion $\Delta(1232)N \to NN$ zur Beschreibung der Dreikörpereffekte eingeführt,

$$\sigma'_{\Delta(1232)N\to NN} = (1+\alpha\frac{\rho}{\rho_0})\sigma_{\Delta(1232)N\to NN}, \tag{8.5}$$

mit zunächst beliebigem Parameter α. Bei den obengenannten Arbeiten handelt es sich um die Produktion bzw. Absorption von Pionen an Kernen im Grundzustand. Daher mußte dort die Produktion von Pionen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen nicht explizit berücksichtigt werden. In der Beschreibung von Schwerionenkollisionen müssen diese Mehrkörpereffekte jedoch sowohl in der Absorption von Pionen aus auch in deren Produktion berücksichtgt werden. Folglich ist es nicht von vornherein klar, ob die Mehrkörperprozesse in Schwerionenkollisionen zu einer Erhöhung oder Verminderung der Zahl der produzierten Pionen führt. Zu Testzwecken wurden im Rahmen des CBUU-Modells die Dreikörpereffekte 'simuliert', indem die Quadrate der invarianten Matrixelemente zur Produktion baryonischer Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen $\overline{|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2}$ (s. Kapitel 4) analog zu (8.5) modifiziert wurden,

$$\overline{|\mathcal{M}_{NN\to NR}|'^2} = (1+\alpha\frac{\rho}{\rho_0})\overline{|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2}. \tag{8.6}$$

Aus Modellrechnungen zur $\Delta(1232)$-Selbsenergie in Medium von Oset und Salcedo [94] ergibt sich, daß der Beitrag der Dreikörperabsorption zur Pionenabsorption bei normaler Kerndichte vergleichbar mit der Absorption der Pionen an zwei Nukleonen ist, d.h. $\alpha = 1$. Damit wurde in einer zentralen $Au + Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV die Pionenmultiplizität um circa 10% reduziert.

8.3.2 π- und Δ-Potentiale

Bewegt sich ein Pion durch ein nukleares Medium, so wechselwirkt es mit den Teilchen dieses Mediums ($\pi N \leftrightarrow \Delta$, $\pi N \leftrightarrow \pi N$ usw.) Den Pionen kommt somit eine

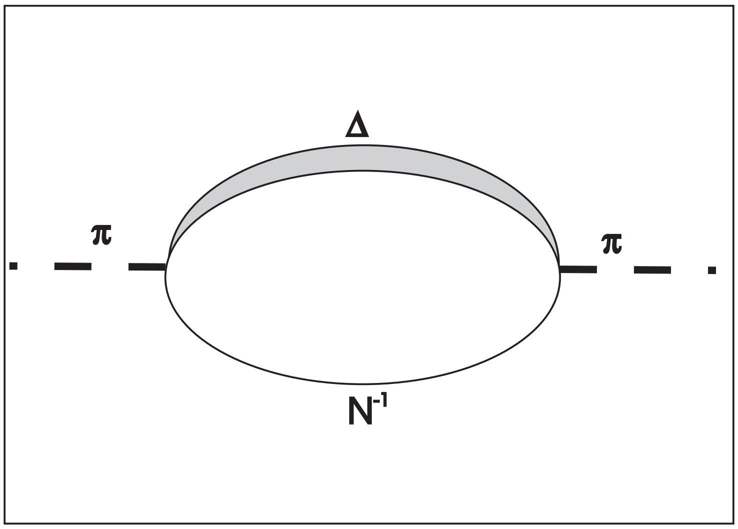

Abbildung 8.10: Polarisationseinschub zur Bestimmung der Pionselbstenergie im Rahmen des Δ-hole-Modells.

Selbstenergie zu, wobei der Realteil der Selbstenergie dem Mittleren-Feld-Potential eines Teilchens entspricht. Die im CBUU-Modell gemachte Annahme, daß die Pionen kein nukleares Mittleres-Feld-Potential erfahren, ist als eine Näherung zu betrachten.
Weiterhin wird im CBUU-Modell für alle Baryonen dasselbe Mittlere-Feld-Potential verwendet, das aus der elastischen Proton-Kern Streuung extrahiert wurde. Da die Wechselwirkung der Δ-Resonanzen (im folgenden steht Δ stellvertretend für alle baryonischen Resonanzen) mit dem es umgebenden Medium im allgemeinen verschieden von der Wechselwirkung eines Nukleons mit dem nuklearen Medium ist, sind auch die Selbstenergien von Nukleon und Δ im allgemeinen unterschiedlich.
Die wichtigste Wechselwirkung eines Pions mit dem Medium sind πN-Kollisionen unter Bildung einer Δ-Resonanz bzw. der Zerfall eines Δ in ein Nukleon und Pion. Zur Selbstenergie einer Δ-Resonanz trägt neben den elastischen Kollisionen und den inelastischen $N\Delta$-Kollisionen auch der Prozeß $\Delta \leftrightarrow N\pi$ wesentlich bei. Zur korrekten Beschreibung der Pionendynamik im Rahmen einer semiklassischen Transporttheorie wie dem CBU-Modell ist somit eine konsistente Bestimmung der optischen Potentiale der Nukleonen, der Δ-Resonanzen und der Pionen erforderlich.
Erste Ansätze hierzu sind in den Arbeiten von Ehehalt et al. [95] und Xiong et al. [96] zu finden. Im Rahmen dieser Arbeiten werden die π- und Δ-Potentiale aus dem Δ-hole-Modell [97] extrahiert, das im folgenden kurz erläutert wird:
Grundlage diese Modells ist die Wechselwirkung im Nukelon-Δ-π-System: $\Delta \leftrightarrow N\pi$. Um den Realteil der Selbstenergie eines Pions zu bestimmen, wird diese Reaktion aus der 'Sicht eines Pions' betrachtet. Das Pion 'zerfällt' in ein Δ und einen Nukleon-Loch Zustand N^{-1} $\pi \leftrightarrow \Delta N^{-1}$. Im Δ-hole-Modell wird die Selbstenergie der Pionen somit durch ΔN^{-1}-Polarisationseinschübe $\Pi(\omega,\vec{p},\rho)$ im Pionenpropagator (s. Abbildung 8.10) gebildet. Der Propagator $G^{\pi}(\omega,\vec{p},\rho)$ eines Pions, das sich mit der Energie ω und dem Impuls $\vec{p}$ durch ein nukleares Medium der Dichte ρ bewegt, ergibt sich aus der Lösung der Dyson-Gleichung

$$G^{\pi}(\omega,\vec{p},\rho) \;\; = \;\; G_0^{\pi}(\omega,\vec{p},\rho) + G_0^{\pi}(\omega,\vec{p},\rho)\Pi(\omega,\vec{p},\rho)G_0^{\pi}(\omega,\vec{p},\rho)$$

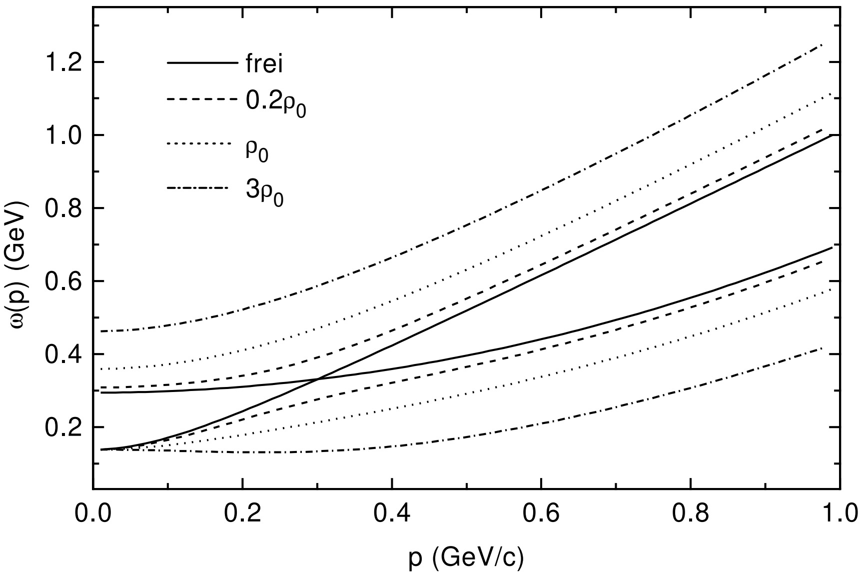

Abbildung 8.11: Lösungen der Gleichung (8.10) für verschiedene Baryonendichten. Für den Landau-Migdal-Parameter g' wurde ein Wert von 0.5 verwendet [95].

$$\begin{aligned} &+ \quad G_0^\pi(\omega,\vec{p},\rho)\Pi(\omega,\vec{p},\rho)G_0^\pi(\omega,\vec{p})\Pi(\omega,\vec{p},\rho)G_0^\pi(\omega,\vec{p},\rho)+\cdots \\ &= \quad G_0^\pi(\omega,\vec{p},\rho)+G_0^\pi(\omega,\vec{p},\rho)\Pi(\omega,\vec{p},\rho)G^\pi(\omega,\vec{p},\rho). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Bei $G_0^\pi(\omega,\vec{p})$ handelt es sich um die Propagatorfunktion für freie Pionen. Diese Gleichung kann als unendliche Reihe ($G_0^\pi(\omega,\vec{p})\Pi(\omega,\vec{p},\rho) << 1$) aufgefaßt werden und man erhält für den vollen π-Propagator $G^\pi(\omega,\vec{p},\rho)$,

$$G^\pi(\omega,\vec{p},\rho)=\frac{G_0^\pi(\omega,\vec{p},\rho)}{1-G_0^\pi(\omega,\vec{p})\Pi(\omega,\vec{p},\rho)}. \tag{8.8}$$

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Tatsache, daß diese Pionenselbstenergie zu einer Dispersionsrelation führt, die viel zu weich ist, da die kurzreichweitige repulsive Wechselwirkung zwischen $\Delta - N^{-1}$-Zuständen nicht berücksichtigt wurde. Diese repulsive Wechselwirkung wird als Lorenz-Lorenz-Ericson-Ericson Korrektur bezeichnet und durch eine konstante Wechselwirkung, den Landau-Migdal-Parameter g', parametrisiert. In diesem Fall nimmt die Pionselbstenergie folgende Form an

$$\Pi^{g'}=\frac{\Pi(\omega,\vec{p},\rho)}{1-g'\Pi(\omega,\vec{p},\rho)/\vec{p}^2}. \tag{8.9}$$

Für die Dispersionsrelation eines Pions ergibt sich dann,

$$\omega^2(\vec{p},\rho)=\vec{p}^2+m^2+\Pi^{g'}(\omega,\vec{p},\rho). \tag{8.10}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind in Abbildung 8.11 (s. [95]) für verschiedene Dichten dargestellt. Man erkennt deutlich den π- und den ΔN^{-1}-Zweig der Lösung. Zum π-Zweig gehören die Linien, die für $p=|\vec{p}|=0$ den Wert $\omega=0.139$ GeV liefern. Die Linien, die für $p=0$ oberhalb von $\omega\approx 0.3$ GeV liegen, bilden den ΔN^{-1}-Zweig. Für $\rho\neq 0$ stellen diese beiden Kurvenscharen die Dispersionsrelation für einen π-ΔN^{-1}-Mischzustand dar, und für $\rho=0$ entspechen die durchgezogenen Linien Dispersionsrelationen für freie Pionen bzw. freie ΔN^{-1}-Zustände. Dies sieht man wie folgt:

Betrachtet man ein quantenmechanisches 2-Zustands-System mit den Zuständen π und ΔN^{-1}, so findet bei verschwindender Dichte keine Wechselwirkung zwischen beiden Zuständen statt, was bedeutet, daß der Hamilton-Operator einer diagonalen $2x2$-Matrix entspricht. Für $\rho \neq 0$ kommt es zur Wechselwirkung zwischen π und ΔN^{-1}, was bedeutet, daß der Hamilton-Operator einer $2x2$-Matrix entspricht, die auch Einträge auf den Nichtdiagonalen enthält und somit Pionen und ΔN^{-1}-Zustände mischt.
Die Implementation dieser so extrahierten Pionenpotentiale in ein semiklassisches Transportmodell zur Simulation von Schwerionenkollisionen bereitet Schwierigkeiten, da der π-ΔN^{-1}-Mischzustand nicht mit einem im klassischen Sinn propagierenden Teilchen identifizierbar ist. In semiklassischen Transporttheorien muß dieser Zustand nach seiner Produktion entweder als Pion oder als ΔN^{-1}-Zustand behandelt werden. Um dieses Problem zu lösen, wurden in [95] effektive Dispersionsrelationen eingeführt, die entweder zu 100% zu pionischen oder zu ΔN^{-1}-Moden korrespondieren. Die pionischen Moden propagieren dann als Quasipionen mit der entsprechenden effektiven Selbstenergie und verlassen das nukleare Medium als freie Pionen. Die ΔN^{-1}-Moden werden benutzt, um Δ-Potentiale abzuleiten. Somit wird gewährleistet, daß nur freie Pionen und Δ-Resonanzen die Reaktionszone einer Schwerionenkollision verlassen. Der Nachteil dieser Methode ist, daß die resultierenden effektiven Dispersionsrelationen von denen des Δ-hole-Modells (s. Abbildung 8.11) abweichen. Mit der soeben beschriebenen Methode haben Ehehalt et al. [95] nur kleine Effekte der π- und Δ-Selbstenergien auf die Pionenspektren gefunden.
In der Arbeit von Xiong et al. [96] werden sowohl die pionischen Moden als auch die ΔN^{-1}-Moden propagiert. Dies hat zur Folge, daß am Ende einer Rechnung auch freie ΔN^{-1}-Zustände vorliegen, welche anschließend in freie Δ-Resonanzen 'umgewandelt' werden. Dies bedeutet aber, daß die Baryonenzahlerhaltung verletzt wird. Die Autoren rechtfertigen ihre Vorgehen damit, daß die Zahl der ungebundenen ΔN^{-1}-Zustände klein ist. Das Ergebnis dieser Arbeit war, daß aufgrund des Pionenpotentials die π-Multiplizität für langsame Pionen erhöht wrude. Hierbei muß allerdings noch berücksichtigt werden, daß für das Mittlere-Feld-Potential der Δ-Resonanzen die Effekte des Δ-hole-Modells vernachlässigt wurden und das nukleonische Potential verwendet wurde. Dadurch werden in den elementaren Reaktionen (z.B. $NN \to N\Delta$) Resonanzen mit kleineren Massen erzeugt, was beim Zerfall der Resonanzen zu langsameren Pionen führt.
In einer Arbeit von Helgeson und Randrup [98] wurde das Δ-hole-Modell um Nukleon-Nukleon-Loch-Zustände erweitert. Im Rahmen einer RPA-Rechnung werden hier sowohl die Δ- , die π- und die ΔN^{-1}-Selbstenergien quantenmechanisch berechnet. Ebenso werden in-Medium Δ-Breiten konsistent mitbestimmt. Da es sich um eine quantenmechanische Rechnung handelt, treten ebenfalls die weiter oben genannten Schwierigkeiten bei der Implementation in ein semiklassisches Transportmodell auf. Im Rahmen dieses Modells muß der Charakter des π-ΔN^{-1}-Mischzustandes erst bestimmt werden, wenn das Quasiteilchen aus dem nuklearen Medium herauspropagiert. Falls sich ein ΔN^{-1}-Zustand ergibt, so schlagen Helgeson und Randrup vor, kann dieser entweder an der Oberfläche des Mediums reflektiert werden oder es erfolgt ein Aufbruch in eine Δ-Resonanz und einen Nukleon-Loch-Zustand. Das Δ kann als physikalisches Teilchen das Medium verlassen und das N^{-1} annihiliert mit einem Nukleon aus seiner Umgebung. Transportrechnungen unter Verwendung diese Modells liegen noch nicht vor.

8.3.3 In-Medium-Wirkungsquerschnitte

Neben den Einteilchenpotentialen spielen die Wirkungsquerschnitte der elementaren Reaktionen (z.B. $NN \to NN$) eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der Dynamik von Schwerionenkollisionen im Rahmen semiklassischer Transportmodelle. Im CBUU-Modell wie auch in ähnlichen Modellen (z.B. RBUU [99], RQMD [33] oder IQMD [31]) werden hierfür Parametrisierungen der freien Wirkungsquerschnitte verwendet.
Die Kollisionsintegrale der CBUU-Gleichungen (2.21) beschreiben jedoch Kollisionen oder Zerfälle von Teilchen, die sich in nuklearem Medium aufhalten. Somit sollten zur Lösung dieser Integrale in-Medium-Wirkungsquerschnitte verwendet werden. Dabei sollten für den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Energiebereich zumindest in-Medium-Wirkungsquerschnitte für die folgenden Reaktionen konsistent innerhalb einer T-Matrixrechnung bestimmt werden: elastische Nukleon-Nukleon- und Nukleon-Resonanz-Streuung, Produktion und Absorption von $\Delta(1232)$ in Nukleon-Nukleon-Kollisionen, direkte 1- und 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen sowie Meson-Nukleon-Kollisionen. Erst die Verwendung von in-Medium-Wirkungsquerschnitten, die diesen Nukleon-$\Delta(1232)$-π-Modellraum abdecken, lassen letztendlich verläßliche Aussagen über die Einflüsse auf die Observablen von Schwerionenkollisionen zu. Zu einer vollständigen Beschreibung müssen zusätzlich auch für Reaktionen mit höheren baryonischen Resonanzen in-Medium-Wirkungsquerschnitte verwendet werden.
Bevor die Ergebnisse einiger Arbeiten zur Bestimmung von in-Medium-Wirkungsquerschnitten angegeben werden, soll zunächst kurz erläutert werden, was unter einer (in-Medium-) T-Matrix zu verstehen ist.
Eine T-Matrix entspricht einer effektiven Wechselwirkung zur Beschreibung von Streuproblemen. Sie ist über die folgende Operatorgleichung definiert:

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} G^0 \hat{T}, \tag{8.11}$$

wobei der Operator $\hat{V}$ die elementare Wechselwirkung des entsprechenden Streuproblems darstellt und G^0 der freie Propagator eines intermediären Zustandes ist. Für den Fall elastischer Streuung zweier Teilchen handelt es sich bei $\hat{V}$ um die 'nackte' Wechselwirkung und G^0 entspricht dem Produkt zweier 1-Teilchen-Greenfunktionen.
Die Beschreibung des Streuproblems wird nun äquivalent dazu, <u>alle</u> Matrixelemente der T-Matrix zu kennen. Aus 8.11 erhält man durch sukzessive Approximation:

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} G^0 \hat{V} + \hat{V} G^0 \hat{V} G^0 \hat{V} + \cdots. \tag{8.12}$$

Man kann die effektive Wechselwirkung dadurch approximieren, daß man die Reihe abbricht. So ergibt sich z.B. die Bornsche Näherung, falls nur das erste Glied dieser Reihe berücksichtigt wird.
Da mit Hilfe der T-Matrix Prozesse in Kernmaterie beschrieben werden sollen, ist es nötig, noch den sog. Blocking-Operator $\hat{Q}$ in die Iterationsgleichung für $\hat{T}$ einzufügen, da keine Fermionenzwischenzustände besetzt sein dürfen.

$$\hat{T} = \hat{V}(1 + G^0 \hat{Q} \hat{T}) \tag{8.13}$$

$\hat{Q}$ verhindert einen Streuprozeß, falls die intermediären Streuzustände schon durch ein Fermionen gleicher Art besetzt sind und gewährleistet somit das Pauli-Prinzip. Gleichung (8.13) wird auch als Bethe-Goldstone Gleichung für die Streuamplitude zweier

Teilchen im Medium, bzw. auch als Leiter-Näherung für die Brückner G-Matrix bezeichnet [53, 54].

Im folgenden soll ein Überblick über die Ergebnisse einiger Arbeiten zur Bestimmung von in-Medium-Wirkungsquerschnitten gegeben werden. Alle Arbeiten basieren auf Gleichung (8.13). Es werden jedoch verschiedene Verfahren zur Lösung der in-Medium T-Matrix Gleichung verwandt.
Der in-Medium Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitt wurde von Faessler et al. [100] im Rahmen der nicht-relativistischen Brückner-Theorie unter Verwendung des Reid-Potentials berechnet. Verglichen mit dem freien Wirkungsquerschnitt resultieren hier starke Veränderungen des Querschnitts mit zunehmender Dichte. Insbesondere ist zu bemerken, daß ein nicht monotones Verhalten als Funktion der Dichte resultiert.
Ter Haar und Malfliet [101] fanden mittels einer relativisitschen Dirac-Brückner Methode ebenso eine starke Veränderung der Wirkungsquerschnitte als Funktion der Dichte. In dieser Arbeit wurden neben dem elastischen $N\Delta$- auch der $N\Delta \to NN$ und der $NN \to NN\pi$-Wirkungsquerschnitt berechnet. Für alle Wirkungsquerschnitte wird eine Reduktion um bis zu 75% !! bei einer Dichte von $3\rho_0$ vorhergesagt.
Li und Macheleit [102] sagen im Rahmen einer Dirac-Brückner Rechnung unter Verwendung des Bonn-Potentials eine Reduktion des elastischen Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnittes mit steigender Dichte vor allem für kleine Energien voraus.
Kürzlich wurde von T.-S. H. Lee eine Arbeit im Rahmen eines nicht-relativistischen effektiven Modells vorgestellt. Neben Mittleren-Feld-Potentialen für das $\Delta(1232)$ werden hier in-Medium-Wirkungsquerschnitte für die Prozesse $NN \to NN$, $NN \to N\Delta$ und $N\Delta \to NN$ angegeben. Zu bemerken ist hier, daß im Gegensatz zu [100] und [102] der elastische NN-Wirkungsquerschnitt mit steigender Dichte erhöht wird.
Eine Verwendung dieser in-Medium-Wirkungsquerschnitte in Transportrechnungen ist zur Zeit noch nicht möglich und auch nicht sinnvoll, da von keiner der oben genannten Arbeiten alle benötigten Nukleon-π-Δ-Wirkungsquerschnitte gleichzeitig bestimmt werden. Weiterhin bleibt anzumerken, daß in allen Rechnungen die Wirkungsquerschnitte nur bis zu invarianten Energien der Nukleon-Nukleon-Kollisionen beschrieben werden, die weit unterhalb der Energien liegen, die im Rahmen der Simulation von Schwerionenkollisionen bei 1 bis 2 AGeV benötigt werden.

Kapitel 9

η-Produktion in Schwerionenkollisionen

Da das η-Meson im Rahmen des CBUU-Modells ausschließlich an die $N(1535)$-Resonanz koppelt, verläuft die η-Produktion nur über die Anregung des $N(1535)$ in Baryon-Baryon bzw. Meson-Baryon Kollisionen und den anschließenden Zerfall in ein Nukleon und ein η-Meson.
In diesem Kapitel soll zunächst, analog zu den Untersuchungen zur Pionenproduktion in Kapitel 6.1, festgestellt werden, in welchem Stadium einer Schwerionenkollision η-Mesonen erzeugt werden und bei welchen Dichten die am Ende der Kollision beobachtbaren η's ausfrieren. Anschließend werden dann die im Rahmen des CBUU-Modells gewonnenen η-Spektren mit experimentellen Daten der $TAPS$-Kollaboration verglichen.

9.1 η- und $N(1535)$-Dynamik

Zur genaueren Analyse der η- und $N(1535)$-Dynamik ist in Abbildung 9.1 die Zahl der in einer zentralen ($b = 0$ fm) $Au+Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV vorhandenen η-Mesonen (durchgezogenes Histogramm) und $N(1535)$-Resonanzen (gestricheltes Histogramm) als Funktion der Zeit dargestellt. Die gepunktete Linie repräsentiert, analog zu Abbildung 6.1, die Baryonendichte im Zentrum des Schwerpunktsystems der Schwerionenkollision und gibt somit Aufschluß über die Gesamtdynamik der Reaktion. Um einen einfacheren Vergleich mit den für die Pionen erhaltenen Resultaten zu ermöglichen, ist die Zahl der im System vorhandenen Pionen (skaliert mit einem Faktor 1/400, strichpunktiertes Histogramm) ebenfalls in der Abbildung dargestellt. Wie bereits im Zusammenhang mit der Diskussion der Dynamik der höheren baryonischen Resonanzen (s. Kapitel 6.2) festgestellt, wird die $N(1535)$-Resonanz hauptsächlich in der Hochdichtephase der Reaktion erzeugt. Die Zahl der $N(1535)$ nimmt im Verlauf der Expansionsphase ab und ist für Zeiten von ≈ 50 fm/c auf eine verschwindend kleine Menge abgesunken. Verglichen mit den Pionen steigt die Zahl der vorhandenen η-Mesonen in der Hochdichtephase schneller an. Dort werden zeitweise sogar Werte erreicht, die über dem am Ende der Reaktion beobachteten (≈ 0.08) liegen. Die Zahl der Pionen hingegen steigt (beginnend bei Zeiten von ≈ 10 fm/c) monoton an und erreicht am Ende der Reaktion mit ihrem asymptotischen Wert auch gleichzeitig

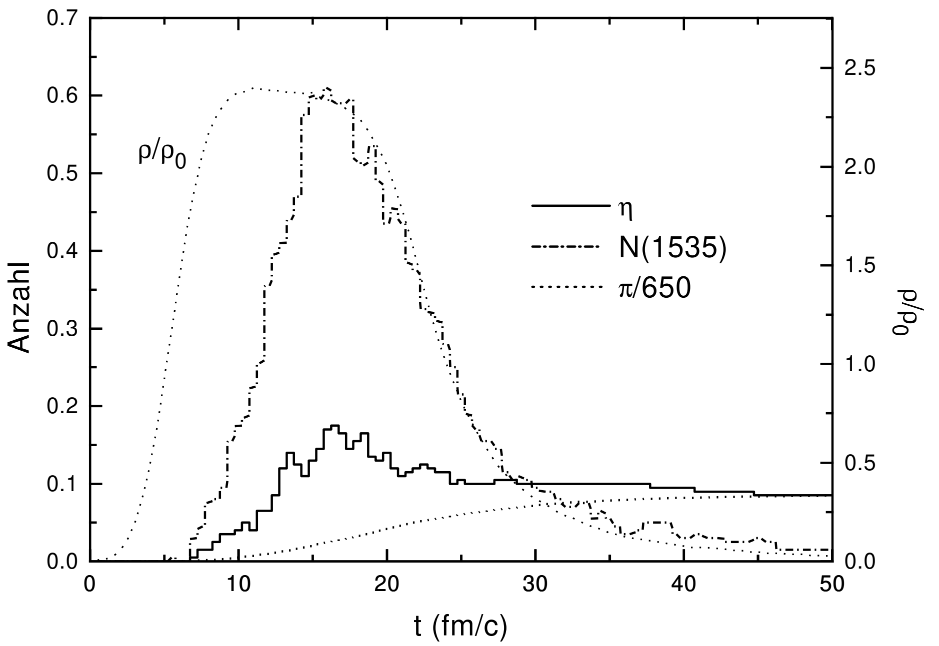

Abbildung 9.1: Zahl der in einer zentralen (b = 0 fm) $Au + Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV vorhandenen η-Mesonen (durchgezogenes Histogramm), $N(1535)$ (gestricheltes Histogramm) und Pionen skaliert mit 1/650 (strichpunktiertes Histogramm) als Funktion der Zeit. Die gepunktete Linie gibt die Baryonendichte in Einheiten von ρ_0 im Zentrum der Reaktion an.

ihr Maximum. Dieser Unterschied zwischen den η-Mesonen und den Pionen läßt sich durch die Tatsache erklären, daß das $N(1535)$ sowohl in ein η und ein Nukleon als auch in ein Pion und ein Nukleon zerfallen kann. Die einmal erzeugten η-Mesonen können in Kollisionen mit einem Nukleon wieder ein $N(1535)$ anregen ($\eta N \to N(1535)$). Falls es anschließend zu einem Zerfall dieses $N(1535)$ kommt, zerfällt es nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\Gamma_{N(1535)\to\eta N}(M)/\Gamma^{tot}(M)$ in ein η und ein Nukleon. Dies führt somit zu einer Reduktion der Zahl der im System vorhandenen η-Mesonen während der Expansionsphase. Das Verhalten der Zahl der η-Mesonen als Funktion der Zeit läßt den Schluß zu, daß die am Ende der Reaktion beobachteten η-Mesonen, im Gegensatz zu den Pionen, im Mittel schon bei Dichten von $\approx \rho_0$ ausfrieren.
Diese Vermutung wird anhand von Abbildung 9.2 bestätigt. Hier ist die mittlere Ausfrierdichte der am Ende der Reaktion beobachteten η-Mesonen als Funktion ihrer Energie im Schwerpunktsystem der Schwerionenreaktion wiederum für $Au + Au$ bei 1.0 AGeV durch die gefüllten Vierecke dargestellt. Die η-Ausfrierdichten liegen zwischen Werten von 0.6 und $1.4\rho_0$. Zum Vergleich ist in dieser Abbildung ebenfalls die Ausfrierdichte der Pionen angegeben (offene Vierecke). Man beobachtet, daß die durchschnittliche Ausfrierdichte der η-Mesonen ungefähr einen Faktor 1.5 über der der Pionen liegt. Während also die beobachteten Pionen nur indirekt Aufschluß über die Resonanzpopulation und damit über die Hochdichtephase einer Schwerionenreaktion geben, werden die η-Mesonen in Gebieten größerer Dichte erzeugt und gestatten somit eher direkte Rückschlüsse auf die Hochdichtephase einer Reaktion.

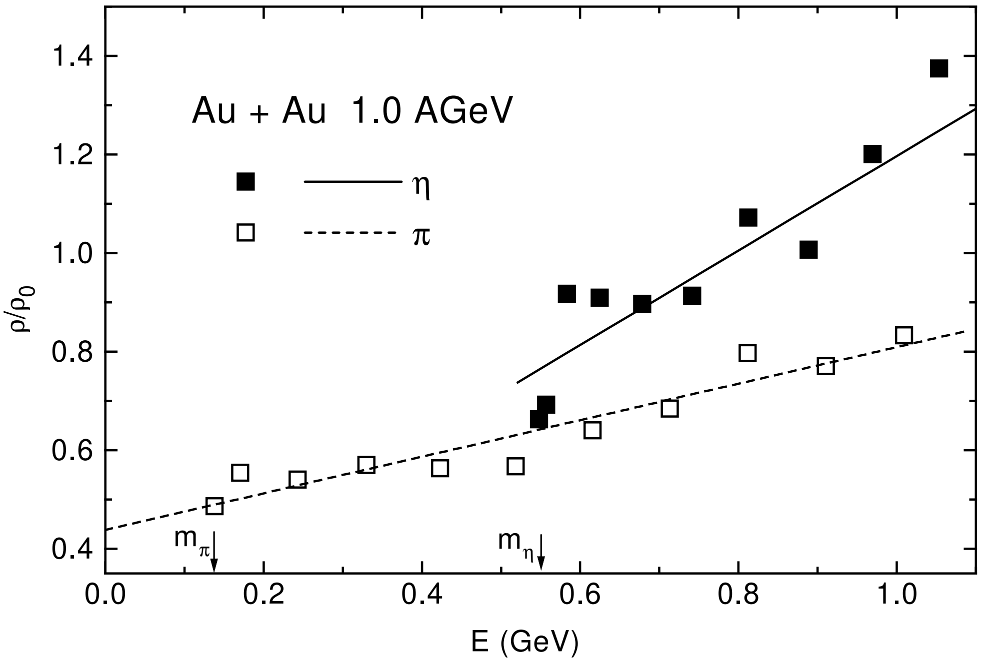

Abbildung 9.2: Die mittlere Ausfrierdichte der η- (ausgefüllte Vierecke) und π-Mesonen (offene Vierecke) einer $Au + Au$-Kollision bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV als Funktion der Energie im Schwerpunktsystem der Reaktion. Die Linien korrespondieren zu linearen Fits an die CBUU-Resultate. Es wurden Ereignisse mit Stoßparametern im Bereich zwischen 0 und 16 fm berücksichtigt.

9.2 Vergleich mit experimentellen Daten

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen sollen im folgenden die Ergebnisse zur η-Produktion in Schwerionenkollisionen mit experimentellen Daten der TAPS-Kollaboration [9, 89] verglichen werden. Dazu sind in Abbildung 9.2 die Ergebnisse der CBUU-Rechnungen (offene Kreise) zusammen mit den Daten [9, 89] (gefüllte Vierecke) für die Systeme $Ar + Ca$ bei 1.0 AGeV, $Au + Au$ bei 1.0 AGeV und $Ar + Ca$ bei 1.5 AGeV als Funktion des η-Transversalimpulses dargestellt. Für alle drei Systeme sind die CBUU-Rechnungen im Rahmen der statistischen Fehler (sowohl der Daten als auch der Rechnungen) im Einklang mit den Daten. Tendenziell werden die Daten jedoch - bis zu einem Faktor 2 - unterschätzt. Während für das leichte $Ar + Ca$ System bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV bei kleinen Transversalimpulsen die Rechnungen die Daten nur leicht unterschätzt, liegt die Rechnung für höhere transversale η-Impulse im unteren Bereich der Fehlerbalken. Für das schwerere $Au + Au$ System bei 1.0 AGeV ist dies für den gesamten p_T-Bereich der Fall. Ein Vergleich dieser beiden Resultate läßt zunächst nur den Schluß zu, daß im CBUU-Modell entweder die in-Medium Absorption der η-Mesonen überschätzt oder die in-Medium Produktion unterschätzt wird. In einer Arbeit von Effenberger et al. [104] wurde die η-Photoproduktion an Kernen [104] im Rahmen des CBUU-Modells untersucht. Die Tatsache, daß hier die totalen Wirkungsquerschnitte reproduziert wurden, deutet darauf hin, daß - zumindest für Dichten im Bereich bis zu ρ_0 - die η-Dynamik durch das CBUU-Modell korrekt beschrieben wird.

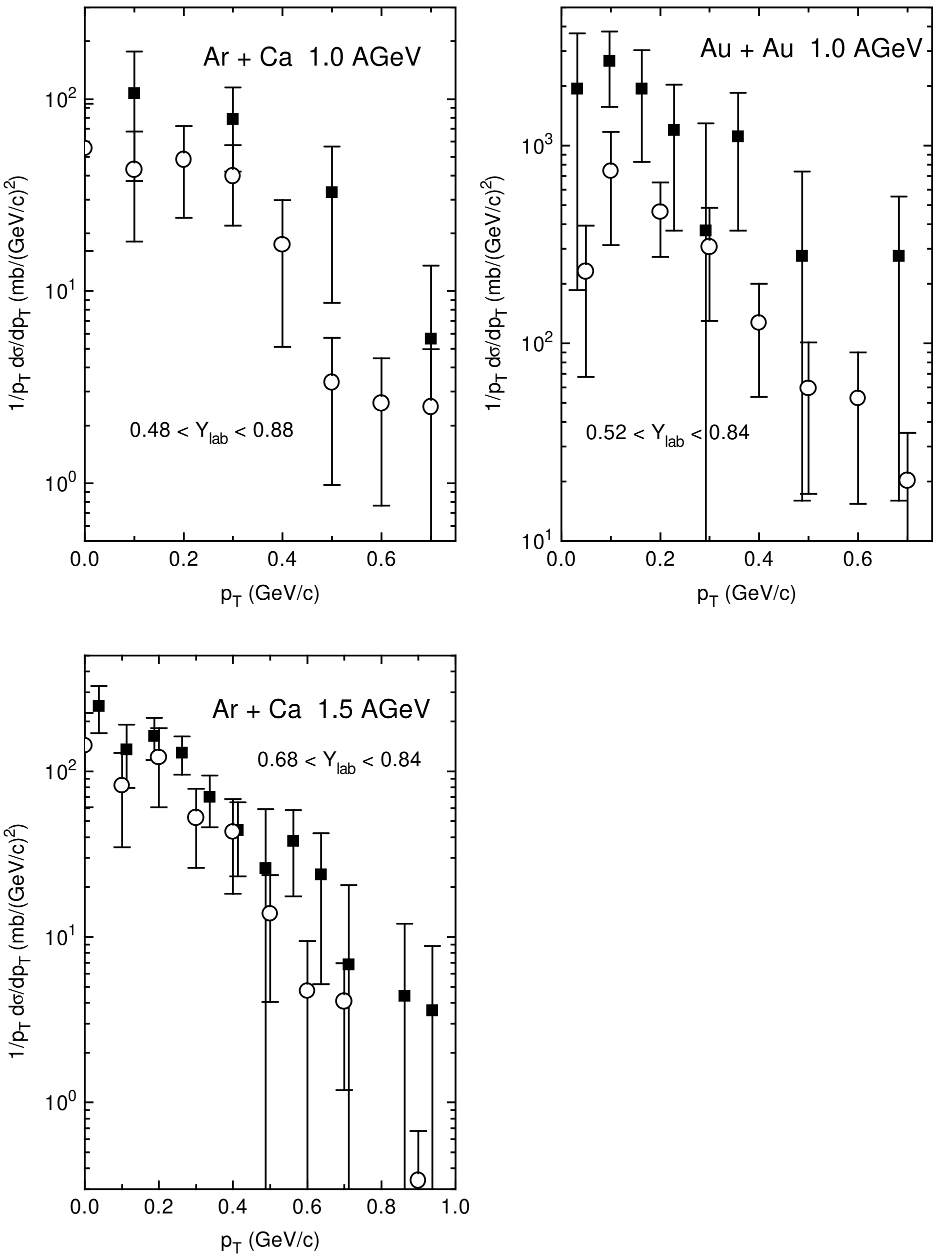

Abbildung 9.3: η-Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen $Ar + Ca$ bei 1.0 AGeV, $Au + Au$ bei 1.5 AGeV und $Ar + Ca$ bei 1.5 AGeV als Funktion des transversalen Impulses der η-Mesonen. Die offenen Kreise repräsentieren die im Rahmen des CBUU-Modells erhaltenen Ergebnisse und die gefüllten Vierecke korrespondieren zu den experimentellen Daten der TAPS-Kollaboration [9, 89]. Die verwendeten Bereiche der Labor-Rapidität sind in den Abbildungen angegeben.

Für das $Ar+Ca$-System bei einer Einschußenergie von 1.5 AGeV liegen experimentelle Daten bis zu transversalen Impulsen von 1.0 GeV/c vor. Für dieses System wird bis zu $p_t \approx 0.5$ GeV/c Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erzielt. Für höhere Impulse werden die Daten wiederum unterschätzt. Eine mögliche Ursache dafür könnte die Kopplung des η-Mesons an höherliegende baryonische Resonanzen sein, welche im CBUU-Modell nicht berücksichtigt sind. Der Beitrag der höheren Resonanzen zur η-Produktion führt wie auch im Fall der Pionen (s. Kapitel 6.2) zu einer Erhöhung der Multiplizitäten hochenergetischer η-Mesonen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das CBUU-Modell die bisher verfügbaren Daten zur η-Produktion in Schwerionenkollisionen zwar im Rahmen der statistischen Fehler (sowohl der experimentellen Daten als auch der Rechungnen) zufriedenstellend beschreibt, jedoch eine deutliche Tendenz zur Unterschätzung der Daten zu erkennen ist. Eine Vergleich mit neueren TAPS-Experimenten bei Einschußenergien von ≈ 2.0 AGeV wird weitere Aussagen über die η- und $N(1535)$-Dynamik in Schwerionenkollisionen zulassen.

Kapitel 10

Dileptonenproduktion

Dileptonen unterliegen nicht der starken Wechselwirkung. Wenn sie in Schwerionenkollisionen produziert werden, verlassen sie somit die Reaktionszone ungestört und bieten die Möglichkeit, direkt die Hochdichtephase einer Schwerionenreaktion zu untersuchen. Dileptonen sind außerdem von großem Interesse, da sie stark an Vektormesonen (ρ, ω, ϕ) koppeln. Dileptonen, die aus dem Zerfall von Vektormesonen stammen (z.B. $\rho^0 \to e^+e^-$), geben somit Aufschluß über die Eigenschaften von Vektormesonen in Medium. QCD-Summenregel-Rechnungen [18] sagen z.B. folgende Dichteabhängigkeit der ρ-Masse voraus

$$m_\rho \approx m_\rho^0(1 - 0.18\frac{\rho}{\rho_0}), \tag{10.1}$$

wobei die Reduktion der Masse m_ρ nach [18] mit der Abnahme des Quarkkondensates $< \bar{q}q >$ bei zunehmender Dichte verknüpft ist. Damit eröffnet die Untersuchung der Dileptonen-Produktion in Schwerionenkollisionen sogar die Möglichkeit, Einblicke in die Struktur des $< \bar{q}q >$-Kondensats bei endlicher Baryonendichte zu erhalten.
Im CBUU-Modell werden Dileptonen durch folgende Kanäle produziert:

- Dalitz-Zerfall des $\Delta(1232)$
- Dalitz-Zerfall der η- und π^0-Mesonen
- $\pi^+\pi^-$-Annihilation
- Proton-Neutron Bremsstrahlung
- π-Nukleon Bremsstrahlung
- ω-Zerfall
- ρ-Zerfall

Die Beiträge aus den Dalitz-Zerfällen höherer baryonischer Resonanzen sind aufgrund kleiner Partialbreiten für den γ-Zerfall vernachlässigbar [56].

10.1 Wirkungsquerschnitte für e^+e^--Produktion

Die Annihilation von $\pi^+\pi^-$-Paaren erfolgt über das neutrale ρ-Meson ρ^0, das in der Vektormeson-Dominanz Hypothese in ein massives Photon zerfällt. Dieses Photon zerfällt anschließend in ein e^+e^--Paar. Eine Parametrisierung des Wirkungsquerschnittes für diesen Prozeß findet man in [105]:

$$\sigma^{\pi^+\pi^-\rightarrow e^+e^-}(M) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\alpha}{M}\right)^2 \sqrt{1-\frac{4m_\pi^2}{M^2}}|F_\pi(M)|^2 \ , \tag{10.2}$$

mit dem elektromagnetischen Formfaktor des Pions

$$|F_\pi(M)|^2 = \frac{m_\rho^4}{(M^2 - {m'_\rho}^2)^2 + m_\rho^2\Gamma_\rho^2}. \tag{10.3}$$

In Gleichung (10.3) ist M die invariante Masse des Dileptonenpaares, α ist die Feinstrukturkonstante und

$$m_\rho = 775MeV \ , \qquad m'_\rho = 761MeV \ , \qquad \Gamma_\rho = 118MeV \ .$$

An dieser Stelle soll bemerkt werden, daß Gleichung (10.2) die Annihilation freier Pionen beschreibt; mögliche in-Medium-Korrekturen werden hier nicht berücksichtigt.
Wenn geladene Teilchen kollidieren, können immer Photonen oder - über virtuelle Photonen - Dileptonen abgestrahlt werden. Der Hauptbeitrag stammt hier von Proton-Neutron Bremsstrahlung. Die Proton-Proton Bremstrahlung ist aufgrund destruktiver Interferenz zwischen einlaufender und auslaufender Amplitude vernachlässigbar. Wie bereits in [56] gezeigt wurde, trägt $\pi^\pm N$ Bremsstrahlung zur Produktion von Dileptonen nur bei sehr kleinen invarianten Massen ($M \leq 100$ MeV) bei. Dieser Massenbereich soll im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet werden.
Der Wirkungsquerschnitt für Dileptonen-Produktion aus Proton-Neutron Bremsstrahlung wird in der 'soft-Photon'-Näherung berechnet:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dy\ d^2q_t\ dM} &= \frac{\alpha^2}{6\ \pi^3} \frac{\overline{\sigma(s)}}{M\ {q_o}^2} \frac{R_2(s_2)}{R_2(s)} \\
R_2(s) &= \sqrt{1-(m_1+m_2)^2/s} \\
s_2 &= s + M^2 - 2\ q_o\sqrt{s} \\
\overline{\sigma(s)} &= \frac{s-(m_1+m_2)^2}{2\ {m_1}^2}\sigma(s),
\end{aligned} \tag{10.4}$$

wobei m_1 die Masse des beschleunigten Teilchens ist, M ist die invariante Masse, q_o die Energie, q_t der transversale Impuls und y die Rapidität des Dileptonen-Paares. Es hat sich gezeigt, daß dieser Wirkungsquerschnitt in guter Näherung die Ergebnisse eines Meson-Austausch-Modells [56, 107] beschreibt.
Alle Teilchen, die eine nichtverschwindende Partialbreite für einen Photonen-Zerfall haben, können über den sog. Dalitz-Zerfall Dileptonen abstrahlen (z.B. $\eta \rightarrow \gamma e^+e^-$). Die Breite für den Dalitz-Zerfall wird aus QED-Rechnungen bestimmt [108]:

$$\frac{d\Gamma}{dM^2} = \frac{\alpha}{3\ \pi}\frac{\Gamma_o(M^2)}{M^2} \tag{10.5}$$

wobei (z.B. für den Prozeß $\Delta \to N e^+e^-$)

$$\Gamma_o(M^2) = \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_N^2, m_\Delta^2)}{16\ \pi\ m_\Delta^2} m_N [2\ M_t(M^2) + M_l(M^2)] \tag{10.6}$$

die totale Zerfallsbreite für den Zerfall in ein massives Photon der Masse M ist. $\lambda(x,y,z)$ ist wie folgt definiert,

$$\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz). \tag{10.7}$$

M_t und M_l sind die invarianten Matrixelemente für den jeweiligen Zerfall.
Da die Dileptonen, die aus dem Dalitz-Zerfall eines π^0 entstehen können, maximal eine Masse von 139 MeV/c^2 aufweisen, spielt der π^0-Dalitz-Zerfall für die Betrachtungen dieser Arbeit keine Rolle. Ein wichiger Beitrag stammt jedoch aus dem Dalitz-Zerfall des $\Delta(1232)$. Verwendet man zur Beschreibung dieses Prozesses die Wechselwirkung, die in [56] angegeben ist, so ergibt sich für die Matrixelemente

$$\begin{aligned} M_l &= (e\ f\ g)^2 \frac{m_\Delta^2}{9\ m_N} M^2\ 4(m_\Delta - m_N - q_o) \\ M_t &= (e\ f\ g)^2 \frac{m_\Delta^2}{9\ m_N} [{q_o}^2(5\ m_\Delta - 3(q_o + m_N)) - M^2(m_\Delta + m_N + q_o)] \\ f &= -1.5 \frac{m_\Delta + m_N}{m_N((m_N + m_\Delta)^2 - M^2)}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Dabei wurde die Kopplungskonstante $g = 2.72$ aus einem Fit an den Zerfall $\Delta \to N\gamma$ mit $\Gamma_o(0) = 0.72$ MeV bestimmt.
Weiterhin ist im CBUU-Modell der Dalitz-Zerfal des η-Mesons entsprechend [106, 108] implementiert:

$$\frac{d\Gamma_{\eta \to \gamma e^+ e^-}}{dM} = \frac{4\alpha}{3\pi} \frac{\Gamma_{\eta \to 2\gamma}}{M} \left(1 - \frac{M^2}{m_\eta^2}\right)^3 |F_\eta(M)|^2, \tag{10.9}$$

wobei der Formfaktor wie folgt parametrisiert ist [106],

$$F_\eta(M) = \frac{1}{1 - M^2/\Lambda_\eta^2}, \tag{10.10}$$

mit

$$\Lambda_\eta = 0.72 \text{ GeV}. \tag{10.11}$$

Dieser Formfaktor stimmt sehr gut mit dem experimentell bestimmten überein.
Die Berechnung der Dileptonen-Multiplizität aus dem direkten Zerfall der ρ- und ω-Mesonen ($\rho, \omega \to e^+e^-$) ergibt sich aus den experimentell bestimmeten Zerfallswahrscheinlichkeiten (4.4×10^{-5} bzw. 7.15×10^{-5}). Die Wirkungsquerschnitte für die Produktion von ρ-Mesons in Nukleon-Nukleon-Kollisionen werden im Rahmen des in Kapitel 4 beschriebenen Resonanzmodells berechnet und sind somit implizit im CBUU-Modell enthalten. Für die Produktion von ω-Mesonen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen wird

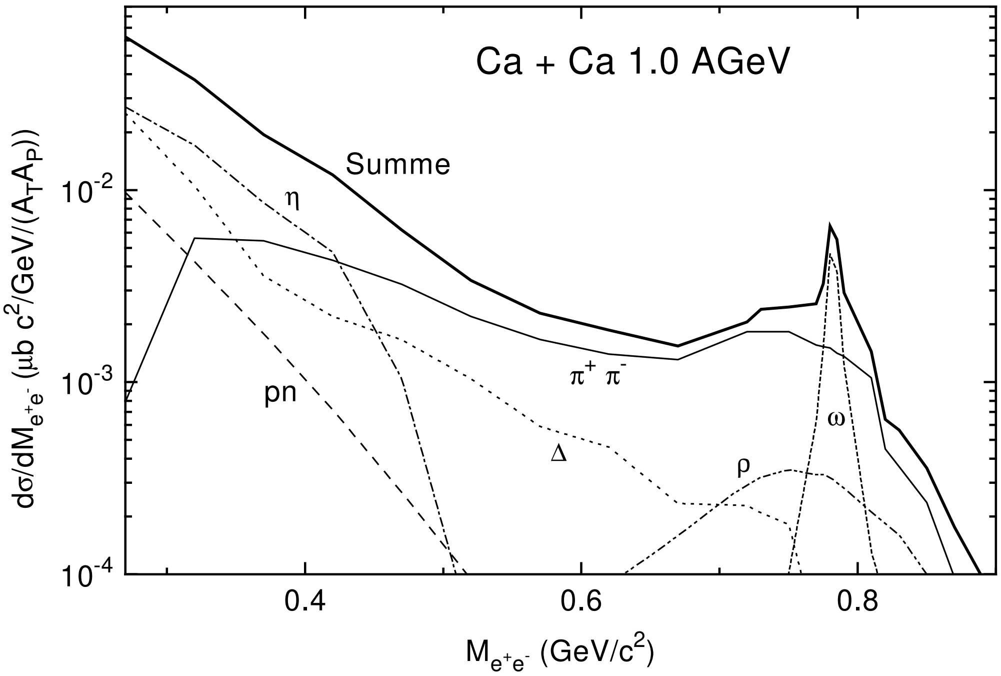

Abbildung 10.1: Massendifferentieller e^+e^--Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $Ca+Ca$ bei 1.0 AGeV dividiert durch das Produkt aus Projektil- und Targetmasse als Funktion der invarianten Dileptonenmasse.

folgende Parametrisierung des experimentell bestimmten Wirkungsquerschnittes [68] verwendet:

$$\sigma^{pp\to pp\omega} = 0.36 \frac{(\sqrt{s}-\sqrt{s_0})^{1.4}\mathrm{GeV}}{1.25\mathrm{GeV}^2 + (\sqrt{s}-\sqrt{s_0})^2}[\mathrm{mb}], \tag{10.12}$$

wobei $\sqrt{s}$ und $\sqrt{s_0}$ die invariante Energie der Nukleon-Nukleon-Kollision bzw. die Schwelle für die ω-Produktion (2.659 GeV) darstellen. Der Wirkungsquerschnitt (10.12) wird für alle Isospinkanäle, sowie für $N\Delta$-Produktionskanäle, verwendet.

10.2 Ergebnisse für $Ca + Ca$ bei 1.0 AGeV

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen die Ergebnisse einer ersten Rechnung zur e^+e^--Produktion im Rahmen des CBUU-Modells vorgestellt werden. In Abbildung 10.1 ist der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von Dileptonen in $Ca + Ca$-Kollisionen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV dividiert durch das Produkt aus Target- und Projektilmasse ($A_T \times A_P$) als Funktion der invarianten Masse der Dileptonen dargestellt.

Aus der Abbildung erkennt man, daß die e^+e^--Multiplizität bei kleinen invarianten Massen ($M_{e^+e^-} \leq 0.4$ GeV/c^2) durch den η-Dalitz-Zerfall (Strich-Punkt-Linie) dominiert wird. Bis zu invarianten Massen von 0.4 GeV/c^2 liegen die Beiträge aus dem Δ-Dalitz-Zerfall (gepunktete Linie) und der $\pi^+\pi^-$-Annihilation (durchgezogene Linie) unterhalb des Beitrages des η-Dalitz-Zerfalls. Die kinematische Grenze des η-Dalitz-Zerfalls befindet sich bei 548 MeV/c^2. Die Proton-Neutron-Bremsstrahlung (gestrichelte Linie) trägt für kleine $M_{e^+e^-}$ nur auf einem Niveau von $\leq 10\%$ zum Gesamtquerschnitt (fettgedruckte durchgezogene Linie) bei. Oberhalb von $\approx$ 0.42 GeV/c^2 entstehen Dileptonen hauptsächlich aus der $\pi^+\pi^-$-Annihilation. Für invariante Massen im Bereich von $\approx$ 0.7 bis 0.82 GeV/c^2 erkennt man die Beiträge aus dem direkten ρ- (Strich-Punkt-Punkt-Line) und ω-Zerfall (kurz gestrichelte Linie). Auf der ρ-Masse liegt der Beitrag des direkten ρ-Zerfalls etwa einen Faktor 10 unter dem der $\pi^+\pi^-$-Annihilation. Für invariante Dileptonenmassen im Bereich der ω-Masse wird der Wirkungsquerschnitt durch den Beitrag des ω-Zerfalls dominert. Die kleine Zerfallsbreite des ω-Mesons führt hier zu einer scharfen Verteilung der Dileptonen. Hier wird auch deutlich, welch hohe Anforderungen bezüglich der Massenauflösung an das Detektorsystem HADES gestellt werden müssen, um in-Medium-Veränderungen der ω- oder ρ-Masse beobachten zu können.

Kapitel 11

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, ein Transportmodell zur Beschreibung von Schwerionenkollisionen im Energiebereich von einigen GeV pro Nukleon zu entwickeln. Nach einer heuristischen Ableitung der CBUU-Transportgleichungen folgte eine ausführliche Beschreibung der verwendeten Einteilchen-Potentiale:
Die im CBUU-Modell verwendeten Mittleren-Feld-Potentiale müssen neben der experimentell bestimmten Impulsabhängigkeit auch ein wohl definiertes Verhalten unter Lorentz-Transformationen aufweisen, da im Verlauf der Simulationsrechnungen die Auswertung der Potentiale in verschiedenen Inertialsystemen erfolgen muß. Ferner muß gewährleistet sein, daß die Berechnung der Einteilchen-Potentiale numerisch nicht zu aufwendig ist, um Vergleiche mit experimentellen Daten inerhalb vernünftiger Rechenzeiten zu ermöglichen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein skalares Potential für alle Baryonen verwendet. Um die genannten Anforderungen zu erfüllen, wird dieses skalare Potential im 'lokalen Ruhesystem der Kernamterie' (LRF) aus nicht-relativistischen Parametrisierungen berechnet.

Neben den Mittleren-Feld-Potentialen bilden die elementaren Reaktionen den zweiten wichtigen Bestandteil der Transportgleichungen. Da in dem betrachteten Energiebereich die Dynamik der Schwerionenkollisionen durch die Anregung höherer baryonischer Resonanzen beeinflußt wird, wurden neben dem Nukleon und dem $\Delta(1232)$ Resonanzen mit Massen bis zu 1950 MeV/c^2 berücksichtigt. Die mesonischen Freiheitsgrade des CBUU-Modells sind Pionen, η-, ρ- und σ-Mesonen mit den entsprechenden Ladungszuständen. Beim σ-Meson handelt es sich nicht um ein physikalisches Teilchen, es repräsentiert vielmehr korrelierte 2π-Paare mit Spin und Isospin $= 0$.

Die Wirkungsquerschnitte der elementaren Reaktionen wurden im Rahmen eines Resonanzmodells bestimmt, welches für Meson-Baryon-Kollisionen die Breit-Wigner-Näherung liefert. Die Wirkungsquerschnitte für die Population der baryonischen Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen wurden durch Anpassung der Quadrate der jeweiligen invarianten Matrixelemente an die experimentellen Daten zur 1π-, η- ρ- und 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Stößen erhalten. Eine Sonderrolle spielt hier das $\Delta(1232)$: Zur Beschreibung der $\Delta(1232)N \leftrightarrow NN$-Wirkungsquerschnitte wurde das Ergebnis eines Ein-Meson-Austauschmodells von Dimitriev und Sushkov verwendet, das die experimentell bestimmten massen- und winkeldifferentiellen Wirkungsquerschnitte reproduziert. Die $N(1535)$-Resonanz ist die einzige baryonische Resonanz, die im Rahmen des CBUU-Modells an das η-Meson koppelt. Somit konnte das invariante Matrixelement zur Anregung des $N(1535)$ in Nukleon-Nukleon-Kollisionen an den experimentell bestimmten $pp \to pp\eta$-Wirkungsquerschnitt angepaßt werden. Die Wirkungsquerschnitte der Umkehrreaktionen ($NR \to NN$) werden unter Annahme der Zeitumkehrinvarianz mit denselben invarianten Matrixelementen bestimmt.

Zur Lösung der gekoppelten CBUU-Transportgleichungen wurde die Testteilchenmethode, die einer Diskretisierung der klassischen Phasenraumverteilung entspricht, verwendet. Die numerische Überprüfung der Stabilität und der Energieerhaltung sowohl für Mittlere-Feld-Rechnungen als auch für Simulationsrechnungen, die 2-Teilchen-Kollisionen beinhalteten, lieferte gute Ergebnisse.

In ersten Studien wurde der Einfluß der höheren baryonischen Resonanzen auf die Dynamik von Schwerionenkollisionen untersucht. Hier wurde gefunden, daß bei Einschußenergien von 1.0 bis 1.5 AGeV in der Hochdichtephase etwa 20% der Baryonen als baryonische Resonanzen vorliegen, wovon wiederum circa 15% bis 20% höhere baryonische Resonanzen sind. Betrachtet man die Anregung der höheren Resonanzen als Funktion der Einschußenergie, so stellt man fest, daß sich die Erhöhung der Energiedichte im Feuerball in der vermehrten Anregung höherer Resonanzen äußert. Der Einfluß der höheren Resonanzen wird in den resultierenden Pionenspektren sichtbar: hochenergetische Pionen stammen überwiegend aus dem 1π-Zerfall der höheren Resonanzen. Die 2π-Zerfallskanäle der höheren Resonanzen bzw. die Reaktion $NN \to \Delta(1232)\Delta(1232)$ bewirkt eine Erhöhung der π-Multiplizität bei kleinen Energien.
In weiteren Analysen wurde gezeigt, daß das in Schwerionenkollisionen beobachtete Pionenspektrum wenig Sensitivität auf die EOS besitzt. Die Multiplizität von hochenergetischen Pionen hängt allerdings von der Form des baryonischen Mittlere-Feld-Potentials ab.

Weiterhin wurden die Effekte der Coulomb-Wechselwirkung auf die resultierenden Pionenspektren untersucht: Die Pionenproduktion setzt am Ende der Hochdichtephase einer Schwerionenreaktion ein. Da zur Produktion hochenergetischer Pionen mehr Energie nötig ist als zur Produktion niederenergetischer Pionen, frieren hochenergetische Pionen im Mittel früher aus als niederenergetische. Somit ist die Ausfrierdichte für Pionen mit hohen Impulsen im Mittel höher als die für langsame Pionen. Da das von allen an der Reaktion teilnehmenden Teilchen generierte Coulomb-Feld proportional zur Baryonendichte ist, erfahren hoch- und niederenergetische Pionen beim Austritt aus der Reaktionszone verschieden große Coulomb-Kräfte. Dies äußert sich in einem von der Pionenenergie abhängigen Verhältnis der Wirkungquerschnitte positiv bzw. negativ geladener Pionen, welches somit Aufschluß über den zeitlichen Ablauf einer Schwerionenreaktion gibt.

Die im Rahmen des CBUU-Modells erzielten Ergebnisse wurden mit experimentellen Daten zur π- und η-Produktion in Schwerionenkollisionen verglichen: Für das System $Ar + KCl$ bei einer Einschußenergie von 1.8 AGeV wurde für negativ geladene Pionen sowohl in der spektralen Form als auch in der Winkelverteilung gute Überein-

simmung mit den experimentellen Daten erzielt. Die Daten der KaoS-Kollaboration zur π^+-Produktion in $Au + Au$ bei 1.0 AGeV werden für Laborimpulse von 0.3 bis 0.4 GeV/c deutlich überschätzt. Ein Vergleich der Rechnungen mit den TAPS-Daten zur π^0-Produktion im gleichen System lieferte jedoch weitgehende Übereinstimmung. Dies läßt den Schluß zu, daß im CBUU-Modell die auf die Pionen wirkenden Coulomb-Kräfte überschätzt werden. Neben den experimentellen Daten zur Pionenproduktion in $Au + Au$ liegen Daten der TAPS-Kolaboration zur π^0-Produktion in $Ar + Ca$ bei Einschußenergien von 1.0 und 1.5 AGeV vor. Während die Daten bei 1.0 AGeV für Transversalimpulse von circa 0.2 GeV/c überschätzt werden, wird für 1.5 AGeV Übereinstimmung mit den Daten erzielt. Obwohl die Ergebnisse zur η-Produktion im Rahmen der statistischen Fehler mit den TAPS-Daten für die Systeme $Au + Au$ bei 1.0 AGeV und $Ar + Ca$ bei 1.0 und 1.5 AGeV übereinstimmen, ist die im CBUU-Modell erzielte η-Multiplizität tendentiell zu gering.
Zum Abschluß wurden erste Ergebnisse zur Dileptonenproduktion in $Ca + Ca$-Stößen bei einer Einschußenergie von 1.0 AGeV präsentiert. In diesem Rahmen sind die Beiträge der Vektormesonen ρ und ω (auch aus der $\pi^+\pi^-$-Annihilation) besonders interessant, da man hofft, anhand dieser Beiträge Aufschlüsse über die Veränderungen von Hadronenmassen innerhalb des nuklearen Mediums zu gewinnen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde nur die Teilchenproduktion in Schwerionenkollisionen betrachtet. In naher Zukunft soll das CBUU-Modell auch zur Berechung kollektiver Observable wie transversalem Fluß oder 'squeeze-out' angewendet werden. Nach einer Erweiterung des Modells auf 'strangeness'-Freiheitsgrade wird dann ein Vergleich mit allen gegenwärtig durchgeführten Experimenten zur Untersuchung der Dynamik von Schwerionenkollisionen im SIS-Energiebereich möglich sein.

Da im CBUU-Modell die Grundzustandseigenschaften von ruhenden Kernen recht gut reproduziert werden, ist auch die Beschreibung von Pion-Kern- oder Proton-Kern-Reaktionen mit dem vorliegenden Modell möglich.

Literaturverzeichnis

[1] G. D. Westfall et al.,
Nuclear fireball model for proton inclusive spectra from relativistic heavy-ion collisions,
Phys. Rev. Lett. **37**, (1976), 1202.

[2] A. Sandoval et al.,
Spectra of p, d and t from relativistic nuclear reactions,
Phys. Rev. **C21**, (1980), 1321.

[3] R. Clare und D. Strottman,
Relativistic hydrodynamics and heavy-ion reactions,
Phys. Rep. **137**, (1986), 277.

[4] H. Stöcker und W. Greiner,
High-energy heavy-ion collisions: probing the Equation of State of nuclear Matter,
Phys. Rep. **137**, (1986), 277.

[5] J. Cugnon, T. Mitzutani und J. Vandermeulen,
Equilibation in relativistic nuclear collisions,
Nucl. Phys. **A352**, (1981), 505.

[6] H. Ströbele et al.,
Charged particle exclusive analysis of central $Ar + KCl$ and $Ar + Pb$ reactions at 1.8 *and* 0.8 *GeV/nucleon*,
Phys. Rev. **C27**, (1983), 1349.

[7] A. Boden et al.,
The Plastic-Ball Spectrometer: an electronic 4π detector with particle identification,
Nucl. Instr. and Meth. **203**, (1982), 189.

[8] U. Mosel und V. Metag,
Hinweis auf 'Resonanzmaterie',
Physikalische Blätter **49**, (1993), 426.

[9] F. D. Berg et al.,
Transverse Momentum distributions of η Mesons in near-threshold relativistic heavy-ion collisions,
Phys. Rev. Lett. **72**, (1994), 977.

[10] A. Lang, W. Cassing, U. Mosel und K. Weber,
Covariant calculation of K^+-production in nucleus-nucleus collisions at SIS-energies,
Nucl. Phys. **A541**, (1992), 507.

[11] T. Maruyama, W. Cassing, U. Mosel, S. Teis und K. Weber,
Study of high-energy heavy-ion collisions in a relativistic BUU approach with momentum-dependent fields,
Nucl. Phys. **A573**, (1994), 653.

[12] W. Cassing, E. L. Bratkovskaya, U. Mosel, S. Teis und A. Sibirtsev,
Kaon versus antikaon production at SIS energies,
nucl-th/9609050.

[13] H. W. Barz und H. Iwe,
Subthreshold antikaon production in relativistic nuclear collisions calculated in the cascade model,
Phys. Lett. **B153**, (1985), 217.

[14] A. Schröter et al.,
Subthreshold antiproton and K^- production in heavy-ion collisions,
Z. Phys. **A350**, (1994), 101.

[15] S. Teis, W. Cassing, T. Maruyama und U. Mosel,
Analysis of subthreshold antiproton production in p-nucleus and nucleus-nucleus collisions in the relativistic BUU approach,
Phys. Rev. **C50**, (1994), 388.

[16] C. Spieles et al.,
Subthreshold anti-proton production in heavy-ion collisions,
Mod. Phys. Lett **A8**, (1993), 2547.

[17] G. Q. Li und C. M. Ko,
Subthreshold antiproton production in nucleus-nucleus collisions,
Phys. Rev. **C49**, (1994), 1139.

[18] T. Hatsuda und S. H. Lee,
QCD sum rules for vector mesons in the nuclear medium,
Phys. Rev. **C46**, (1992), R34.

[19] M. Lutz, S. Klimt und W. Weise,
Meson properties at finite temperature and baryon density,
Nucl. Phys. **A542**, (1992), 521.

[20] L. Simic et al.,
Influence of collision centrality upon participant protons in $d+C$, $\alpha+C$ and $C+C$ reactions at 4.2 GeV/c.,
Phys. Rev. **C37**, (1988), 2064.

[21] S. Nagamia et al.,
Production of pions and light fragments at alrge angles in high energy nuclear collisions,
Phys. Rev. **C24**, (1981), 971.

[22] G. Roche et al.,
Dielectron production in $Ca + Ca$ *collisions at* 1.0 *and* 2.0 $AGeV$,
Phys. Lett. **B226**, (1989), 228.

[23] O. Schwalb,
Massenabhängigkeit der Mesonenproduktion ind den Systemen $Kr + Zr$ *und* $Au + Au$ *bei* $E = 1\ GeV/u$,
Disserttion, Justus-Liebig-Universität Gießen, GSI-Report **93-38**, (1993).

[24] O. Schwalb et al.,
Test of a TAPS subarray with electrons,
Nucl. Instr. and Meth. **A295**, (190), 191.

[25] P. Senger et al.,
The KAON Spectrometer at SIS,
Nucl. Instr. and Meth. **A327**, (1993), 393.

[26] A. Gobbi et al.,
A highly segmented ΔE*-time-of-flight wall as forward detector of the* 4π*-system for charged particles at the SIS/ESR accelerator*,
Nucl. Instr. and Meth. **A324**, (1993), 156.

[27] W. Reisdorf,
Central collisions of Au *on* Au *at* 150, 250 *and* 400 $AMeV$,
nucl-ex/961009.

[28] N. Hermann,
Particle production and flow at SIS energies,
nucl-ex/961007.

[29] HADES Kollaboration,
HADES proposal,
1994.

[30] J. Aichelin,
Quantum Molecular Dynamics: a dynamical microscopic n-body approach to investigate fragment formation and the nuclear equation of state in heavy-ion collisions,
Phys. Rep. **202** (1991) 233.

[31] St. A. Bass,
Kollektive Effekte von Pionen bei SIS-Eenrgien,
GSI-Report **93-13**, (1993).

[32] St. A. Bass, C. Hartnack, H. Stöcker and W. Greiner,
Pion correlations probe the nuclear equationof state in relativistic heavy-ion collisions,
Phys. Rev. **C51**, (1995), 3343.

[33] H. Sorge, H. Stöcker und W. Greiner,
Relativistic Quantum Molecular Dynamics approach to nuclear reactions at ultra relativistic energies,
Nucl. Phys. **A498**, (1989), 567c.

[34] P. Danielewicz und G. F. Bertsch,
Production of deuterons and pions in a transport model of energetic heavy-ion collisions,
Nucl. Phys. **A533**, (1991), 712.

[35] B. A. Li und C. M. Ko,
Formation of superdense hadronic matter in high energy heavy-ion collisions,
Phys. Rev. **C52**, (1995), 2037.

[36] F. Reif,
Statistische Physik und Theorie der Wärme,
de Gruyter, Berlin (1987).

[37] G. F. Bertsch und S. Das Gupta,
A guide to microscopic models for intermediate energy heavy-ion collisions, Phys. Rep. **160** (1988) 189.

[38] W. Cassing, K. Niita und U. Mosel,
Hard-photon production within a self-consistent transport approach to heavy-ion collisions,
Nucl. Phys. **A504** (1989) 391.

[39] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik X*,
Akademie Verlag, Berlin, (1983).

[40] L. Nordheim,
Proc. Roy. Soc. (London) **A119** (1928) 689.

[41] W. Cassing, V. Metag, U. Mosel und K. Niita,
Production of energetic particles in heavy-ion collisions,
Phys. Rep. **188** (1990) 363.

[42] W. Cassing und S. J. Wang,
Towards selfconsistent relativistic transport theories,
Z. Phys. **A337** (1990) 1.

[43] W. Botermanns und R. Malfliet,
A relativistic quantum kinetic equation for heavy-ion collisions,
Nucl. Phys. **A539** (1988) 617.

[44] W. Botermanns und R. Malfliet,
Quantum transport theory of nuclear matter,
Phys. Rep. **198** (1990) 115.

[45] K. Weber, B. Blättel, W. Cassing, C. Dönges, V. Koch, A. Lang und U. Mosel,
A relativistic effective interaction for heavy-ion collisions,
Nucl. Phys. **A539** (1992) 713.

[46] H. Goldstein,
Klassische Mechanik,
AULA-Verlag, Wiesbaden, (1987).

[47] G. Baym und L. P. Kadanoff,
Quantum statistical mechaniscs,
W. A. Benjamin, New York, (1962).

[48] R. Balescu,
Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics,
Wiley & Sons, New York, (1975).

[49] Particle Data Group,
Review of Particle Properties,
Phys. Rev. **D50** (1994) 1173.

[50] J. Cugnon, D. Kinet und J. Vandermeulen,
Pion production in central high energ nuclear collisions,
Nucl. Phys. **A379** (1982) 553.

[51] V. Dimitriev and O. Sushkov,
Δ-formation in the $^1H(^3He,^3H)\Delta^{++}$-reaction at intermediate energies,
Nucl. Phys. **A459** (1986) 503.

[52] S. Huber and J. Aichelin,
Production of Δ and N^*-resonances in the one-boson exchange model, Nucl. Phys. **A573** (1994) 587.

[53] P. Ring und A. Schuck,
The Nuclear Many-Body Problem,
Springer-Verlag, New York, (1980).

[54] A. deShalit und H. Feshbach,
Theoretical Nuclear Physics Volume 1: Nuclear Structure,
Wiley, New York, (1974).

[55] G. F. Bertsch, H. Kruse und S. Das Gupta,
Boltzmann equation for heavy-ion collisions,
Phys. Rev. **C35**, (1987), 1666.

[56] Gy. Wolf, G. Batko, W. Cassing, U. Mosel, K. Niita und M. Schäfer,
Dilepton production in heavy-ion collisions,
Nucl. Phys. A517, (1990), 615.

[57] B. A. Li und C. M. Ko,
Formation of superdense hadronic matter in high energy heavy-ion collisions,
Phys. Rev. **C52**, (1995), 2037.

[58] C. Gale, G. M. Welke, M. Prakash, S. J. Lee und S. Das Gupta,
Transverse momenta, nuclear equation of state, and momentum-dependent interactions in heavy-ion collisions,
Phys. Rev. **C41**, (1990), 1545.

[59] G. Welke, M. Prakash, T. T. S. Kuo und S. Das Gupta,
Azimuthal distributions in heavy ion collisions and the nuclear equation of state,
Phys. Rev **C38**, (1988) 2101.

[60] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew,
Taschenbuch der Mathematik,
Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1979).

[61] K. Weber
Eine kovariante effektive Wechselwirkung mit impulsabhängigen Potentialen zur Beschreibung von Schwerionenkollisionen,
Dissertation, Justus-Liebig-Universität Gießen, (1992).

[62] J. J. Sakurai,
Advanced Quantum Mechanics,
Addison-Wesley, Redwood City, (1967).

[63] B. D. Serot und J. D. Walecka,
The relativistic nuclear many-body problem,
Adv. Nucl. Phys. vol. 16, (1986), 1.

[64] T. Maruyama, W. Cassing, K. Weber and U. Mosel,
Relativistic BUU approach with momentum-dependent fields,
Phys. Lett. **B297**, (1992), 228.

[65] B. Krusche et al.,
Near threshold photoproduction of η-mesons off the proton,
Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 3736.

[66] J. H. Koch, E. J. Moniz und N. Ohtsuka,
Nuclear photoabsorption and Compton scattering at intermediate energy,
Ann. Phys. **154** (1084) 99.

[67] F. Halzen und A. D. Martin,
Quarks and leptons,
John Wiley & Sons, New York, (1984).

[68] Baldini, Flamino, Moorhead, Morrison,
Landolt-Börnstein,
Band 12, Springer-VErlag, Berlin, (1987).

[69] M. Effenberger,
Gammaabsorption an Kernen,
Diplomarbeit, Justus-Liebig-Universität Gießen, (1996).

[70] E. Chiavassa et al.,
Eta meson production in p d and p p collisions,
Phys. Lett. **B337** (1994) 192.

[71] H. Lenske,
private Mitteilung.

[72] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky und W. T. Veterling,
Numerical recipies in Pascal,
Cambridge University Press, Cambridge, (1989).

[73] R. S. Varga,
Matrix iterative analysis,
Prentice Hall, New Jersey, (1962).

[74] T. Kodama et al.,
Causality and relativistic effects in intranuclear cascade calculation,
Phys. Rev. **C29** (1984) 2146.

[75] C. Fuchs, H. Lenske und H. H. Wolter,
Density dependent hadron field theory,
Phys. Rev. **C52**, (1995), 3043.

[76] J. W. Negele,
Structure of finite nuclei in the local-density approximation,
Phys. Rev. **C1**, (1970), 1260.

[77] H. S. Köhler,
Brueckner theory of nuclei,
Phys. Rep. **18C**, (1975), 219.

[78] T. Weidmann,
private Mitteilung.

[79] G. Odyniec et al.,
Pion spectra in central $La + La$ collisions at 530, 740 and 1350 MeV/A,
Proceedings of the 8th high energy heavy ion study, LBL, Berkely, (1987).

[80] Gy. Wolf,
private Mitteilung.

[81] J. W. Harris, R. Bock, R. Brockmann et al.,
Pion production as a probe of the nuclear matter equation of state,
Phys. Lett. **B153**, (1985), 377.

[82] J. W. Harris, G. Odyniec, H. G. Pugh et al.,
Pion production in high-energy nucleus-nucleus collisions,
Phys. Rev. Lett. **58**, (1987), 463.

[83] C. Müntz, A. Wagner, P. Baltes et al.,
Charged pion production in heavy ion collisions at SIS energies,
Proceedings of the international workshop XXIII on gross properties of nuclei and nuclear excitations, Hirschegg, Österreich, (1995), 345.

[84] Bao-An Li,
Revisit of Coulomb effects on π^-/π^+ ratio in heavy ion collisions,
Phys. Lett. **B346**, (1995), 5.

[85] R. Stock,
Particle production in high energy nucleus-nucleus collisions,
Phys. Rep. **135**, (1986), 259.

[86] C. Müntz et al.,
Properties of high-energy pions emitted from heavy-ion collisions at 1 GeV/nucleon,
Z. Phys. **A352**, (1995), 352.

[87] C. Sturm,
private Mitteilung.

[88] O. Schwalb, M. Pfeiffer, F. D. Berg et al.,
Mass dependence of π^0-production in heavy-ion colisions,
Phys. Lett. **B321**, (1994), 20.

[89] V. Metag,
private Mitteilung.

[90] U. Mosel,
Hadrons and nuclei far away from equilibrium,
Nucl. Phys. **A583**, (1995), 29c.

[91] A. Engel,
Untersuchung der Pion-Kern-Reaktion in einer erweiterten BUU-Simulation
Dissertation, Justus-Liebig-Universität, Gießen, (1993).

[92] L. L. Salcedo, E. Oset M. J. Vicente und C. Garcia-Recio,
Computer simulation of inclusive pion nuclear reactions,
Nucl. Phys. **A484**, (1988), 557.

[93] A. Hombach,
Photoproduktion von Pionen und Eta-Mesonen an Kernen,
Diplomarbeit, Justus-Liebig-Universität Gießen, (1994).

[94] E. Oset und L. L. Salcedo,
Delta self-energy in nuclear matter,
Nucl. Phys. **A468**, (1987), 631.

[95] W. Ehehalt, W. Cassing, A. Engel, U.Mosel und Gy. Wolf,
Effects of pion and Δ selfenergies in nuclear matter,
Phys. Lett. **B298**, (1993), 31.

[96] L. Xiong, C. M. Ko und V. Koch,
Transport model with quasipions,
Phys. Rev. **C47**, (1993), 788.

[97] T. Ericson und W. Weise,
Pions and nuclei,
Clarendon Press, Oxford, (1988).

[98] J. Helgesson und J. Randrup,
Tratment of pionic modes at the nuclear surface for transport descriptions,
nucl-th/9508036.

[99] V. Koch, B. Blättel, W. Cassing und U. Mosel,
Analysis of intermediate energy heavy ion reactions within a relativistic transport model,
Nucl. Phys. **A532**, (1991), 715.

[100] A. Faessler,
Description of heavy ion reactions with medium dependent forces,
Nucl. Phys. **A495**, (1989), 103c.

[101] B. ter Haar und R. Malfiet,
Pion production, pion absorption, and nucleon properties in dense nuclear matter: relativistiv Dirac-Brueckner approach at intermediate and high energies,
Phys. Rev. **C36**, (1987), 1611.

[102] G. Q. Li und R. Macheleit,
Microscopic calculation of in-medium nucleon-nucleon corss sections,
Phys. Rev. **C48**, (1993), 1702.

[103] T.-S. H. Lee,
Medium effects on binary collisioins with the Δ-resonance,
Phys. Rev. **C54**, (1996), 1350.

[104] M. Effenberger, A. Hombach, U. Mosel und S. Teis,
Photoproduction of pions and eta in nuclei,
Nucl. Phys. **A**, im Druck.

[105] C. Gale und J. Kapusta,
Dilepton radiation from high temperature nuclear matter,
Phys. Rev. **C35**, (1987), 2107.

[106] L.G. Landsberg,
Electromagnetic decays of light mesons,
Phys. Rep. **128**, (1985), 301.

[107] M. Schäfer, T. Biró, W. Cassing und U. Mosel,
e^+e^--production in proton-neutron collisions,
Phys. Lett. **B221**, (1989), 1.

[108] B.E. Lautrup und J. Smith,
Radiative corrections to decays with a Dalitz pair,
Phys. Rev. **D3**, (1971) 1122.

[109] J. Stoer und R. Burlisch,
Einführung in die Numerische Mathematik,
Springer-Verlag, Berlin, (1978).

[110] J. D. Jackson,
Klassische Elektrodynamik,
de Gruyter, Berlin, (1983).

Anhang A

Das Kollisionskriterium

In diesem Kapitel wird der Algorithmus von Kodama et al. [74] beschrieben. Wie bereits in Kapitel 5.6 erläutert, ist dieser Algorithmus Hauptbestandteil der numerischen Lösung der Kollisionsintegrale. Mit seiner Hilfe wird der relativistisch invariante räumliche Abstand zweier Teilchen bestimmt und überprüft, ob eine Kollision möglich ist. Falls eine Kollision erlaubt ist, wird anschließend bestimmt zu welchem Zeitpunkt sie stattfindet.

Im folgenden wird der Lorentz-invariante Abstand zweier Teilchen 1 und 2 analog zu [74] abgeleitet. Die Teilchen werden in dem Inertialsystem, in dem die Transportrechnung durchgeführt wird (im folgenden Rechensystem genannt), zur Zeit t durch ihre Ortskoordinaten $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und ihre Viererimpulse $(E_1, \vec{p}_1)$, $(E_2, \vec{p}_2)$ charakterisiert. Eine Lorentz-Transformation in das Schwerpunktsystem der beiden Teilchen liefert die Raumzeitkoordinaten $(t_1^{cm}, \vec{x}_1^{cm})$, $(t_2^{cm}, \vec{x}_2^{cm})$ und die Viererimpulse $(E_1^{cm}, \vec{p}_1^{cm})$, $(E_2^{cm}, \vec{p}_2^{cm})$. Nimmt man an, daß die Viererimpulse der Teilchen 1 und 2 konstant sind, so kann die Bewegung der Teilchen in ihrem gemeinsamen Schwerpunktsystem durch die Gleichungen $(i = 1, 2)$

$$\vec{x}_i^{cm}(t^{cm}) = \vec{x}_i^{cm}(t_i^{cm}) + \vec{v}_i^{cm}(t^{cm} - t_i^{cm}) \quad , \tag{A.1}$$

beschrieben werden. t^{cm} ist die Zeitkoordinate im Schwerpunktsystem beider Teilchen und bei

$$\vec{v}_i^{cm} = \frac{\vec{p}_i^{cm}}{E_i^{cm}} \tag{A.2}$$

handelt es sich um die Geschwindigkeit der Teilchen. Das Quadrat des räumlichen Abstands d beider Teilchen in ihrem gemeinsamen Schwerpunktsystem zu einem Zeitpunkt t^{cm} ist somit

$$d^2(t^{cm}) = (\vec{x}_{12}^{cm} + \vec{v}_{12}^{cm} t^{cm})^2 , \tag{A.3}$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{x}_{12}^{cm} &= \vec{x}_1^{\,cm} - \vec{x}_2^{\,cm} - \vec{v}_1^{\,cm}\, t_1^{cm} + \vec{v}_2^{\,cm}\, t_2^{cm} \\ \vec{v}_{12}^{cm} &= \vec{v}_1^{\,cm} - \vec{v}_2^{\,cm} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Der Stoßparameter b ist definiert als der minimale Abstand beider Teilchen. Dieser minimale Abstand wird zur Zeit

$$t_{min}^{cm} = -\frac{\vec{x}_{12}^{cm} \cdot \vec{v}_{12}^{cm}}{(\vec{v}_{12}^{cm})^2} \tag{A.5}$$

angenommen. Somit ergibt sich für das Quadrat des Stoßparameters b

$$b^2 = (\vec{x}_{12}^{cm})^2 - \frac{(\vec{x}_{12}^{cm} \cdot \vec{v}_{12}^{cm})^2}{(\vec{v}_{12}^{cm})^2}. \tag{A.6}$$

Ausgedrückt durch Koordinaten im Inertialsystem, in dem die Rechnung durchgeführt wird, lautet es

$$b^2 = R_{12}^2 - \frac{h_{12}^2}{v_{12}^2} \tag{A.7}$$

mit

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 + ((\vec{p}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))/m_1)^2 \\ h_{12} &= \vec{p}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)/m_1 - (\vec{p}_2 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))m_1/(p_1 \cdot p_2) \\ v_{12}^2 &= 1 - \left(\frac{m_1\, m_2}{p_1 \cdot p_2}\right). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Gleichung (A.7) stellt den gesuchten relativistisch korrekten Ausdruck zur Bestimmung des Abstandes zweier Teilchen dar.
Zur vollständigen Lösung der Kollisionsintegrale muß noch der Zeitpunkt der Kollision bestimmt werden. Im gemeinsamen Schwerpunktsystem der beiden Teilchen ist dieser Zeitpunkt durch t_{min}^{cm} gegeben. Transformiert man t_{min}^{cm} für beide Teilchen in das Rechensystem, so ergeben sich dort im allgemeinen zwei unterschiedliche Kollisionszeitpunkte. Dies läßt sich im Rahmen einer semiklassischen Transporttheorie nicht realisieren, da dort die Kollision zu einer festen Zeitpunkt erfolgen muß. Um diesen Zeitpunkt festzulegen, wird im Rahmen des CBUU-Modells folgendes Verfahren angewandt: Analog zu den Gleichungen (A.3) und (A.4) wird im Ruhesystem des Teilchens 1 der Zeitpunkt t_{min}^1 der nähesten Annäherung sowie der kürzeste räumliche Abstand von Teilchen 1 und 2 berechnet. $\Delta\tau_{12}$ ist das Eigenzeitintervall von Teilchen 1, indem es in seinem Ruhesystem von der Ausgangskoordinate $\vec{x}_1$ zum Kollisionsort propagiert. $\Delta\tau_{12}$ ergibt sich aus der Differenz der Zeit t im Eigensystem von Teilchen 1 und t_{min}^1. Anschließend wird $\Delta\tau_{12}$ durch die Koordinaten der Teilchen 1 und 2 im Rechensystem ausgedrückt,

$$\Delta\tau_{12} = \vec{p}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)/m_1 - h_{12}/v_{12}^2. \tag{A.9}$$

Eine Lorentz-Transformation in das Rechensystem ergibt,

$$\Delta t_{12} = \frac{E_1}{m_1}\,\Delta\tau_{12}. \tag{A.10}$$

Analog wird für Teilchen 2 das Eigenzeitintervall $\Delta\tau_{21}$ bestimmt.
Die Kollision zur Zeit t im Rechensystem findet statt, falls die folgende Bedingung erfüllt ist

$$|\Delta t_{12} + \Delta t_{21}| \leq \Delta t \quad , \tag{A.11}$$

wobei Δt die in der Simulationsrechnung verwendete Zeitschrittweite ist.

Anhang B

Numerische Behandlung des Coulomb-Potentials

Die explizite Behandlung der Isospinfreiheitsgrade macht die Einbeziehung der elektromagnetischen Kräfte der Teilchen untereinander unerläßlich. Das Coulomb-Potential für eine gegebene Ladungsverteilung $\rho_c(\vec{r})$ kann entweder mit Hilfe der Integraldarstellung des Potentials,

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho_c(\vec{r'})}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \tag{B.1}$$

oder durch die Lösung der Poisson-Gleichung,

$$-\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi\rho_c(\vec{r}), \tag{B.2}$$

bestimmt werden. Da man im Laufe der Transportrechnung das Coulomb-Potential, z.B. zur Berechnung der Teilchentrajektorien (s. Kapitel 5.4.2), an vielen Stützstellen berechnen muß, erscheint der Lösungsweg (B.1) als zu aufwendig, da hier die Ladungsverteilung $\rho_c(\vec{r})$ an jeder Stützstelle mit der Greenschen Funktion gefaltet werden muß. Bei Verwendung der Testteilchenmethode bedeutet dies, daß man zur Berechnung des Coulomb-Potentials an jeder Stützstelle über alle Testteilchen summieren muß,

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N*A} \frac{q_i}{\mid \vec{r} - \vec{r_i} \mid}, \tag{B.3}$$

wobei N die Anzahl der Testteilchen pro Nukleon, A die Summe der Massenzahlen von Target und Projektil der betrachteten Schwerionenreaktion und q_i die Ladung der Testteilchen darstellt. Für große N konsumiert diese Methode zuviel CPU-Zeit. Es ist somit günstiger, die Poisson-Gleichung (B.2) zu lösen.

B.1 Das ADI-Verfahren

Zur Lösung der Poisson-Gleichung verwenden wir das ADI-Verfahren von Peaceman und Rachford (alternating direction implicit iterative method) - ein Verfahren zur iterativen Lösung partieller Differentialgleichungen -, das im folgenden am Beispiel der dreidimensionalen Poisson-Gleichung erläutert werden soll. Eine allgemeine Darstellung für partielle Differentialgleichungen der Form

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) - \frac{d^2}{dy^2}f(x,y) + \sigma f(x,y) = \rho(x,y) \tag{B.4}$$

mit $f(x,y) = 0$ auf dem Rand des Integrationsgebietes (Dirichletsches Randwertproblem) findet man in [73] und [109].
Diskretisiert man die dreidimensionale Poisson-Gleichung

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d^2}{dz^2}\right\}\Phi(x,y,z) = 4\pi\rho_c(x,y,z) \tag{B.5}$$

mit Hilfe zentraler Differenzen auf einem Gitter mit äquidistanten Gitterabständen h in allen drei Raumrichtungen, so erhält man die folgenden Differenzengleichung,

$$\begin{aligned} &-\Phi_{i-1,j,k} + 2\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i+1,j,k} \\ &-\Phi_{i,j-1,k} + 2\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j+1,k} \\ &-\Phi_{i,j,k-1} + 2\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j,k+1} \quad = \quad 4\pi\rho(x_i,y_j,z_k)h^2; \end{aligned} \tag{B.6}$$

die $\Phi_{i,j,k}$ sind hierbei die Näherungswerte für die exakten Werte des Coulomb-Potentials an den Orten $\vec{r} = (x_i, y_j, z_k)$, mit $x_i = i * h$, $y_j = j * h$ und $z_j = k * h$. Die Werte für i, j und k sind aus den Intervallen $-N_x \leq i \leq N_x$, $-N_y \leq j \leq N_y$ und $-N_z \leq k \leq N_z$; wobei die N_x, N_y und N_z die Zahl der Stützstellen in positiver x-, y- und z-Richtung angeben. Soll das Potential auf dem Rand des Gitters ($\mid i \mid = N_x$, $\mid j \mid = N_y$ oder $\mid k \mid = N_z$) berechnet werden, so werden die Terme der linken Seite der Differenzengleichung (B.6), deren Indizes (i, j, k) vom Betrag her größer sind als die entsprechende Zahlen der Stützstellen, auf die rechte Seite der Gleichung gebracht. Zum Beispiel ergibt sich für $\vec{r} = (x_{N_x},\, y_0,\, z_{-N_z})$

$$\begin{aligned} -\Phi_{N_x-1,0,-N_z} &+ 2\Phi_{N_x,0,-N_z} \\ -\Phi_{N_x,-1,-N_z} &+ 2\Phi_{N_x,0,-N_z} - \Phi_{N_x,1,-N_z} \\ &+ 2\Phi_{N_x,0,-N_z} - \Phi_{N_x,0;-N_z+1} = \\ 4\pi\rho(x_i,y_j,z_k)h^2 + \Phi_{N_x+1,0;-N_z} &+ \Phi_{N_x,0;-N_z-1} := \tilde{R}(x_{N_x}, y_0, z_{N_z}) \end{aligned} \tag{B.7}$$

Die neue rechte Seite der Diffenzengleichung wird mit $\tilde{R}$ abgekürzt. Gleichung (B.7) entspricht der Differenzengleichung der Poisson-Gleichung für ein Dirichletsches Randwertproblem mit dem Quellterm $\tilde{R}$. Diese Gleichung läßt sich als Matrixgleichung der Form

$$A\Phi = \tilde{R} \tag{B.8}$$

mit $A := X + Y + Z$ auffassen, wobei X, Y und Z durch ihre Wirkung auf den Vektor Φ definiert sind:

$$\begin{aligned} (X\Phi)_{i,j,k} &= -\phi_{i-1,j,k} + 2\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i+1,j,k} \\ (Y\Phi)_{i,j,k} &= -\phi_{i,j-1,k} + 2\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j+1,k} \\ (Z\Phi)_{i,j,k} &= -\phi_{i,j,k-1} + 2\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j,k+1}. \end{aligned}$$

Ordnet man die Näherungswerte $\Phi_{i,j,k}$ für das Potential in dem Vektor Φ wie folgt an,

$$\begin{aligned}\Phi = (&\Phi_{-N_x,-N_y,-N_z}, \Phi_{-N_x+1,-N_y,-N_z}, \cdots, \\ &\Phi_{N_x,-N_y,-N_z}, \cdots \Phi_{N_x,N_y,-N_z}, \cdots, \Phi_{N_x,N_y,N_z}),\end{aligned} \tag{B.9}$$

so erhält man für X die folgende positiv definite symmetrische NxN ($N = (2N_x+1) * (2N_z+1) * (2N_z+1)$) Tridiagonalmatrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & . & . & & & & & & \\ & . & . & . & & & & & \\ & & . & . & . & & & & \\ & & & . & . & . & & & \\ & & & & . & . & . & & \\ & & & & & . & . & . & \\ & & & & & & . & . & -1 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y und Z können auf dieselbe Matrixform gebracht werden, indem man die $\Phi_{i,j,k}$ im Vektor Φ entsprechend anordnet.
Die Grundlage des ADI-Verfahrens besteht nun darin, das Gleichungssystem (B.8) in drei äquivalente Gleichungssysteme umzuformen:

$$\begin{aligned} (X+\lambda E)\Phi &= (\lambda E - Y - Z)\Phi + \tilde{R} \\ (Y+\lambda E)\Phi &= (\lambda E - Z - X)\Phi + \tilde{R} \\ (Z+\lambda E)\Phi &= (\lambda E - X - Y)\Phi + \tilde{R}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Dabei steht E für die Einheitsmatrix derselben Dimension wie A und bei dem Konvergenzparameter λ handelt es sich um eine reelle Zahl mit $\lambda > 0$. Obige Umformung benutzt man zur Definition der Iterationsschritte des ADI-Verfahrens:

$$(X+\lambda_{(l+1)}E)\Phi^{(l+\frac{1}{3})} = (\lambda_{(l+1)}E - Y - Z)\Phi^{(l)} + \tilde{R} \tag{B.11}$$
$$(Y+\lambda_{(l+1)}E)\Phi^{(l+\frac{2}{3})} = (\lambda_{(l+1)}E - Z - X)\Phi^{(l+\frac{1}{3})} + \tilde{R} \tag{B.12}$$
$$(Z+\lambda_{(l+1)}E)\Phi^{(l+1)} = (\lambda_{(l+1)}E - X - Y)\Phi^{(l+\frac{2}{3})} + \tilde{R}. \tag{B.13}$$

Ein Iterationsschritt des ADI-Verfahrens besteht also aus drei Teilschritten. Zuerst werden die $\Phi^{(l)}_{i,j,k}$ des l-ten Iterationsschrittes so angeordnet, daß X auf Tridiagonalform gebracht wird (s.o). Aus Gleichung (B.11) wird mit der Methode der Gaußschen Elimination [109] $\Phi^{(l+\frac{1}{3})}$ bestimmt. Dieser Vektor wird derart umgeordnet, daß Y zu einer Tridiagonalmatrix wird. $\Phi^{(l+\frac{2}{3})}$ wird mittels Gleichung (B.12) nun analog zu $\Phi^{(l+\frac{1}{3})}$ berechnet. Im letzten Teilschritt werden aus Gleichung (B.13) die $\Phi^{(l+1)}_{i,j,k}$ des (l+1)-ten Iterationsschrittes ermittelt. Diese Folge von Iterationsschritten wird so lange wiederholt, bis die $\Phi_{i,j,k}$ mit der gewünschten Genauigkeit vorliegen.
Zur Beschleunigung der Konvergenz des ADI-Verfahrens besteht die Möglichkeit, in jedem Iterationsschritt den Wert des Konvergenzparameters λ zu verändern (siehe dazu [73, 72]). Von dieser Möglichkeit wird bei der Implementation des ADI-Verfahrens

im CBUU-Transportprogramm kein Gebrauch gemacht. Da die in den CBUU-Simulationsrechnungen verwendete Zeitschrittweite so klein gewählt ist, daß sich die dort auftretende Ladungsverteilung von Zeitschritt zu Zeitschritt nur wenig verändert, wird eine schnelle Konvergenz des ADI-Verfahrens dadurch gewährleistet, daß man als Startvektor für das ADI-Verfahren jeweils die Lösung der Poisson-Gleichung aus dem vorangegangenen Zeitschritt verwendet.

B.2 Berechnung der Randwertbedingungen

Zur eindeutigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung gehört die Angabe des Randwertproblems. Die Werte des Coulomb-Potentials auf dem Rand des Integrationsgebietes gehen bei der Anwendung des ADI-Verfahrens in den Quellterm der Differenzengleichung (B.7) ein.
Bei gegebener Ladungsverteilung ist das Coulomb-Potential auf dem Rand des Integrationsgebietes durch Gleichung (B.1) gegeben. Die Berechnung des Potentials nach dieser Gleichung ist, wie zu Beginn dieses Teils des Anhangs bereits erläutert, numerisch zu aufwändig. Deshalb wird das Coulomb-Potential auf dem Rand des Integrationsgebietes mit Hilfe einer Multipolentwicklung [110] bis zur 3. Ordnung

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5} + \frac{1}{2r^7}\sum_{i,j,k=1}^{3} T_{ijk} r_i r_j r_k \tag{B.14}$$

bestimmt. Dabei ist $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ein Punkt auf dem Rand des Integrationsgebietes. Mit r wird der Betrag des Ortsvektors $\vec{r}$ bezeichnet. Bei $\vec{p}$ handelt es dich um das Dipolmoment der Ladungsverteilung $\rho_c(\vec{r})$

$$\vec{p} = \int \vec{r'}\rho_c(\vec{r'})d^3r',$$

Q_ij ist der symmetrische Tensor des Quadrupolmomentes

$$Q_{ij} = \int (3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij})\rho_c(\vec{r'})d^3r'$$

und der Tensor T_ijk bezeichnet den Oktupoltensor

$$T_{ijk} = \int (5r'_i r'_j r'_j - 3r'^2\delta_{ij}r'_k)\rho_c(\vec{r'})d^3r'.$$

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in sein Institut sowie sein stetes Interesse am Fortgang meiner Arbeit und seine intensive Betreuung bedanken. Zudem bedanke ich mich für seine Unterstützung, die es mir ermöglicht hat, an zahlreichen Konferenzen teilnehmen zu können.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Dr. Wolfgang Cassing, der durch seine Betreuung und ständige Diskussionsbereitschaft wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Entscheidend für die Fertigstellung dieser Arbeit war die produktive Zusammenarbeit mit meinen 'BUU-Mitstreitern' Martin Effenberger, Alexander Hombach und Dr. Gyuri Wolf. Sie standen mir während meiner Promotionszeit in physikalischen und numerischen Fragen sowie bei der Suche nach Fehlern aller Art stets hilfreich zur Seite. Gyuri danke ich besonders für die Implementation der Dileptonenproduktion ins BUU-Programm. Martin danke ich für die enge Zusammenarbeit bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte und für die Erstellung der Routinen zur Berechnung der Dimitriev-Wirkungsquerschnitte. Alexander und Gyuri standen mir bei der Beseitigung von Druckfehlern und Stilblüten hilfreich zur Seite.

Ich danke den Mitgliedern des Institutes für Theoretische Physik I für die angenehme Arbeitsatmosphäre. Besonders hervorheben möchte ich hier Thomas Feuster, Alexander Hombach, Jörn Häuser und Wolfram Peters, die stets für Probleme aller Art ein offenes Ohr hatten. Herrn PD Dr. Horst Lenske danke ich für sein Interesse am Fortgang meiner Arbeit und für zahlreiche 'energieerhaltende' Diskussionen. Außerdem danke ich der Computer-Crew Dr. Horst Lenske, Jochen Geiß und Stefan Loh. Ohne das PC-Wissen, die TeX-Installation und vor allem die Hilfsbereitschaft von Alexander Hombach und Thomas Feuster wären einige Probleme zu großen Hürden geworden.
Beim täglichen Kampf mit Formularen, Fristen, Büchern und Leihscheinen standen mir Elke Jung und Christiane Pausch hilfreich zur Seite.

Den größten Dank möchte ich meiner Mutter und meiner Frau Sarah für das Verständnis und die Unterstützung während meiner Promotionszeit aussprechen.