

Dynamik von Schwerionenkollisionen im Rahmen eines mikroskopischen Modells

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
der Justus Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 13 — Physik

vorgelegt
von Andreas Lang
aus Saarbrücken

Gießen, 1991

D 26
 Dekan: Prof. Dr. Volker Metag
 I. Berichterstatter: Prof. Dr. Ulrich Mosel
 II. Berichterstatter: Prof. Dr. Werner Scheid
 Tag der mündlichen Prüfung: 28. November 1991

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Relativistische Transporttheorie	5
1.1 Die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung	5
1.2 Die Transportgleichung	7
1.3 Der N-N Wirkungsquerschnitt	8
2 Numerische Implementation	11
2.1 Die Diskretisierung des Problems	11
2.2 Das Stoßintegral	12
2.2.1 Theoretische Einführung	12
2.2.2 Lösungsverfahren	14
2.2.3 Vergleich der Lösungsverfahren	18
2.3 Das Glätten der Quelldichten	24
3 Thermodynamische Eigenschaften	27
3.1 Theoretische Einführung	27
3.2 Numerische Betrachtungen	28
3.3 Zeitentwicklung	31
3.4 Energie- und Massenabhängigkeit	39
3.5 Vergleich mit experimentellen Daten	42
4 Teilchenproduktion	45
4.1 Modellbeschreibung	45
4.1.1 Perturbative Behandlung der K^+ Produktion	45
4.1.2 Die Parametrisierung des elementaren Prozesses $BB \rightarrow K^+YN$	46
4.2 K^+ Wirkungsquerschnitte in Schwerionenkollisionen	50
4.2.1 Analyse von zentralen Kollisionen	50
4.2.2 Stoßparameterabhängigkeit	54
4.2.3 Baryonische Zerlegung	57
4.2.4 Sensitivität auf Quasi-Teilchen-Eigenschaften	59
4.2.5 Vergleich mit ersten Daten der KAOS-Gruppe	62

Zusammenfassung	67
Literaturverzeichnis	71
A Das Transportprogramm	79
A.1 Einführung	79
A.2 Globale Variablen und Parameter	81
A.2.1 Parameter	81
A.2.2 Variablen	82
A.2.3 Äquivalente Adressen	82
A.2.4 Sortierfelder	83
A.3 Das Hauptprogramm MAIN	83
A.4 Die Initialisierungsroutine INIT	93
A.5 Die Glättungsroutine SMEAR	100
A.6 Der Stoßterm RCDELTA	105
A.7 Das Pauli-Blocking TPBLCK	114
A.8 Das Pauli-Blocking PAULI für die Teilchenproduktion	118
A.9 Der NN-Wirkungsquerschnitt CROSS	121
A.10 Die Dichteberechnung DENS	126
A.11 Die selbstkonsistente Lösung der Mesonenfelder ITERAT	131
A.12 Die Sortieroutine XSORT	137

Abbildungsverzeichnis

2.1 Übergangsrate im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u.	19
2.2 Mittlere Zahl der Kollisionen pro Teilchen im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u.	19
2.3 Dichte im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u.	20
2.4 Transversaler Druck im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u.	20
2.5 Rapiditätsverteilung dN/dY für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u.	21
2.6 Transversaler Fluß für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u.	22
2.7 Rechenzeit als Funktion der Testteilchen/A für Nb + Nb und Ca + Ca.	23
2.8 Rechenzeit als Funktion der Projekttilmasse für 1000 Testteilchen/A.	23
2.9 Wichtung der Gitterpunkte für den Glättungsalgorithmus	26
3.1 Impulsraum-Verteilung $n(k)$ ($T = 75$ MeV; $\rho = 3\rho_0$) in einem Volumenelement.	30
3.2 Statistischer Fehler in der Temperatur-Berechnung als Funktion der Probengröße.	30
3.3 Zeitentwicklung der Baryonen-Dichte in der Reaktionsebene	32
3.4 Lokale thermodynamische Größen für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; — NL1.	34
3.5 Lokale thermodynamische Größen für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; — NL2.	35
3.6 Lokale thermodynamische Größen für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; — NL3.	36
3.7 Der transversale Druck P_t für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; — NL1.	38
3.8 Maxima von Dichte, transversalem Druck und transversaler Temperatur als Funktion der Einschußenergie für Ca + Ca, Nb + Nb und Au + Au.	39

3.9	Flußwinkel und transversaler Fluß als Funktion der Einschußenergie für Ca + Ca, Nb + Nb und Au + Au.	40
3.10	Transversaler Fluß als Funktion des transversalen Drucks P_t	41
3.11	Entropie pro Nukleon als Funktion der Zeit für die Reaktion Au + Au bei 800 MeV/u; Die verwendete Parametrisierung ist NL1.	42
3.12	Entropie pro Nukleon als Funktion der Strahlenergie für Ca + Ca, Nb + Nb und Au + Au.	43
3.13	Mittlerer Transversalimpuls pro Nukleon $\langle p_x/A \rangle$ als Funktion der CM-Rapidität y für die Reaktionen Ar + KCl und La + La bei 800 MeV/u	44
4.1	Parametrisierung des totalen K^+ Wirkungsquerschnitts	47
4.2	Parametrisierung des differentiellen K^+ Wirkungsquerschnitts	48
4.3	Verhältnis der differentiellen K^+ Ausbeute N_K^{Au}/N_K^{Ne} für die Reaktionen Au + Au und Ne + Ne, 41° im Lab. bei 1 GeV/u	49
4.4	K^+ Spektrum unter 41° im Lab. für Ne+Ne bei 1 GeV/u und $b = 0$ fm	51
4.5	K^+ Spektrum unter 41° im Lab. für Au+Au bei 1 GeV/u und $b = 0$ fm	52
4.6	K^+ Multiplizität als Funktion der Dichte für $b = 0$ fm, $E_{beam} = 1$ GeV/u an $\theta_{lab} = 41^\circ$. Parametersatz NL2	53
4.7	Massenabhängigkeit der K^+ Multiplizität für $b = 0$ fm, $E_{beam} = 1$ GeV/u an $\theta_{lab} = 41^\circ$	54
4.8	Stoßparameterabhängigkeit der K^+ Multiplizität für Au + Au bei 1 GeV/u, $\theta_{lab} = 41^\circ$. Parametersatz NL2	55
4.9	Verhältnis $N_{Lx}/N_{L1}(b)$ der K^+ Multiplizität für Au + Au bei 1 GeV/u, $\theta_{lab} = 41^\circ$	56
4.10	Baryonische Zerlegung der ein K^+ erzeugenden Kollisionen. Ne + Ne bei 1 GeV/u, $b = 0$ fm	58
4.11	Baryonische Zerlegung der ein K^+ erzeugenden Kollisionen. Au + Au bei 1 GeV/u, $b = 0$ fm	58
4.12	„In-medium“ Modifikationen des K^+ Wirkungsquerschnitts (s. Text); Ne+Ne bei 800 MeV/u, $b = 0$ fm, $\theta_{CM} = 90^\circ$	60
4.13	Protonen-Spektrum als Funktion des Stoßparameters b für die Reaktion Au + Au bei 1 GeV/u. $\theta_{lab} = 12-48^\circ$	61
4.14	Verhältnis der totalen K^+ zur Protonen Häufigkeit K^+ / p als Funktion des Stoßparameters b . $\theta_{lab} = 41^\circ$	63
4.15	K^+ Spektrum unter 41° im Lab. für Au + Au bei 1 GeV/u und $b = 0$ fm. Vergleich verschiedener Parametrisierungen	64
4.16	Differentielle inklusive K^+ und Protonen Spektren für die Reaktionen Au + Au und Ne + Ne bei 1 GeV/u. $\theta_{lab} = 41^\circ$	65

A.1	Hauptprogramm MAIN	84
A.2	Detail aus MAIN	85
A.3	Detail aus MAIN	86
A.4	Detail aus MAIN	87

Tabellenverzeichnis

1.1	Parametrisierungen der Lagrangedichte (1.1)	7
3.1	Parameter für die Simulation	31

Einleitung

Hochenergetische Schwerionenkollisionen bieten die einzigartige Möglichkeit, das Verhalten von Kernmaterie weitab vom Grundzustand unter Laborbedingungen zu untersuchen. Während die Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie experimentell leicht zugänglich und damit gut bekannt sind, sind die einzigen bekannten Objekte in der Natur, in denen hochkomprimierte und angeregte Kernmaterie vorliegt, das Innere von Neutronensternen und Supernovae. Diese astrophysikalischen Systeme entziehen sich einer direkten Beobachtung und zu ihrem Verständnis ist die Kenntnis der „nuklearen Zustandsgleichung“ zwingend notwendig. Ähnliche Bedingungen wie dort sollten auch während der Geburt unseres Universums, dem „Big Bang“ vorgelegen haben. Auch um die dort abgelaufenen Prozesse besser verstehen zu können, ist das Studium der elementaren Teilchen der Natur sowie der daraus zusammengesetzten Kernbausteine von höchster Wichtigkeit. Es zeigt sich somit, daß die Schwerionen-Physik nicht nur neue Erkenntnisse auf dem klassischen Arbeitsfeld der Kernphysik liefern kann, sondern auch zur Lösung kosmologischer Fragen beiträgt.

Leider ist die Beschreibung von Schwerionenkollision durch das vollständige nukleare Vielkörperproblem unmöglich. Der interessanteste Zeitpunkt der Reaktion, d.h. die Hochdichtephase, ist experimentell nur indirekt durch die Beobachtung des Endzustand der Endprodukte zugänglich. Es ist demnach notwendig, mögliche Korrelationen zwischen den nicht-beobachtbaren Größen (wie z.B. der maximalen Energiedichte) und den beobachtbaren (wie z.B. den Teilchenspektren) herzustellen.

Aus theoretischer Sicht ist die Lösung der vollständigen A-Teilchen-Schrödingergleichung selbst mit den schnellsten heute verfügbaren Computern nicht-möglich. Die Notwendigkeit einer kovarianten Rechnung für die hohen Strahlenergien, die wir in dieser Arbeit betrachten (typischerweise mehr als 600 MeV/u), ist eine zusätzliche Komplikation. Man ist daher gezwungen, geeignete Approximationsverfahren zur Lösung des A-Teilchen-Problems zu entwickeln.

Die Form der gemessenen Teilchenspektren könnte zunächst auf einen thermodynamischen Ansatz hinweisen [1, 2, 3]. Es wurde jedoch sehr bald deutlich, daß die Annahme eines äquilibrierten Feuerballs nur einen sehr be-

grenzten Bereich der experimentellen Daten wiedergeben kann [4, 5, 6, 7]. Hydrodynamische Modelle wurden zwar erfolgreich zur Beschreibung von Schwerionenkollisionen eingesetzt [8, 9]; sie sind jedoch nicht in der Lage, den Weg des Systems zum thermodynamischen Gleichgewicht korrekt wiederzugeben, da eine lokal äquilibrierte Phasenraumverteilung eine wesentliche Voraussetzung in diesen Modellen ist. Es ist deshalb eine wichtige Frage, welcher Grad von Äquilibration während der Reaktion erreicht wird.

Diese Frage ist zudem wesentlich, wenn man die „Zustandsgleichung für Kernmaterie“ aus diesen Reaktionen gewinnen möchte. Erste Untersuchungen in dieser Richtung wurden von Cugnon, der die globale Äquilibration untersuchte [10], und von Randrup, der die Kollision zweier unendlicher Stücke Kernmaterie studierte [11], unternommen. Unser Ziel in dieser Arbeit ist es unter anderem, diese Studien auf die lokalen Eigenschaften zweier kollidierender endlicher Kerne auszuweiten. Wir diskutieren daher in Kapitel 3 eingehend den Grad der Äquilibration und die lokalen thermodynamischen Größen in Schwerionenkollisionen in einem großen dynamischen Bereich und für verschiedene Parametrisierungen der zugrundeliegenden Lagrangedichte.

Wie bereits angesprochen, sind diese thermodynamischen Größen nicht direkt beobachtbar. Wichtige Observablen einer Schwerionenkollision sind deshalb Teilchenspektren, die Informationen über die Reaktionsdynamik liefern können. Dies trifft speziell auf Teilchen zu, die im Eingangskanal nicht vorhanden sind und erst während der Reaktion erzeugt werden. Sollten diese Teilchen bevorzugt während einer bestimmten Phase der Reaktion entstehen, so können sie als „Sonden“ für diese Phase verstanden werden. Wir werden deshalb die Erzeugung von K^+ -Mesonen im Rahmen dieser Arbeit untersuchen.

Die ersten Messungen der K^+ -Produktion wurden bereits vor fast zehn Jahren durchgeführt [12, 13]. Diese waren allerdings bis vor kurzem auf Strahlenergien von über 2.1 GeV/u [14] beschränkt, weit über der Schwelle für K^+ Produktion in freier Nukleon-Nukleon Streuung (≈ 1.56 GeV). Da die positiven Kaonen eine relative große mittlere freie Weglänge besitzen ($\approx 6 - 8$ fm bei ρ_0), könnten sie besonders gut geeignete Sonden für die hochkomprimierte, heiße Reaktionszone sein. Die ersten K^+ Daten wurden auch tatsächlich gut durch Kaskaden-Rechnungen [15, 16, 17, 18, 19] oder Kollisions-Modelle [20, 21, 22, 23] beschrieben. Aichelin und Ko vermuteten dann, daß die K^+ -Produktion sensitiv auf die Kompressibilität der Kernmaterie sein könnte [24]. Diese Vermutung gründete sich auf BUU-Simulationen mit verschiedenen Parametrisierungen des mittleren nuklearen Potentials. In späteren Rechnungen von Aichelin et. al. [25] zeigte sich jedoch, daß die Impulsabhängigkeit der Wechselwirkung einen stärkeren Einfluß auf die K^+ Erzeugung hat als Änderungen in dem nuklearen Kompressionsmodul. Dies würde eine korrekte Bestimmung der Kernkompressibilität mittels K^+ Produktion erschweren.

Weitere Informationen über die K^+ Produktion wurden durch $p + A$ Reaktionen im Energiebereich von 800 MeV - 1 GeV, also weit unter der Schwelle, geliefert [26]. Wie sich herausstellte, ist die K^+ Produktion für diese Reaktionen durch den Kanal $\pi N \rightarrow K^+ \Lambda$ dominiert, da die ersten Nukleon-Nukleon Kollisionen nur einen minimalen Beitrag liefern [27, 28, 29]. Es scheint damit naheliegend, zu vermuten, daß dieser Kanal auch für Kern-Kern Stöße im Energiebereich unterhalb der Schwelle dominiert. Wie jedoch von Batko et. al. [29] gezeigt wurde, trägt der πN -Kanal für $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ Kollisionen bei 1.5 GeV/u nur zu 10-15% bei. Dieses Ergebnis wurde später von Ko et. al. bestätigt [30].

In Kapitel 4.1 werden wir unsere Parametrisierung des elementaren Reaktionsquerschnitts $BB \rightarrow K^+ YB$ ($B = \text{Baryon}$, $Y = \text{Hyperon}$) vorstellen. Kapitel 4.2 enthält eine detaillierte Studie der Sensitivität des K^+ Wirkungsquerschnitts auf Änderungen der effektiven Masse der Nukleonen (und damit der Stärke der Impulsabhängigkeit), der nuklearen Kompressibilität sowie unterschiedlicher Projektil-Target Kombinationen. Der Vergleich mit neuesten Daten bei 1 GeV/u erlaubt sodann erste Hinweise auf den Kompressionsmodul von Kernmaterie.

Dissertation

Andreas Lang

Gießen, 1991

Kapitel 1

Relativistische Transporttheorie

1.1 Die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung

Der Ausgangspunkt für die theoretische Beschreibung relativistischer Schwerionen-Kollisionen muß eine kovariante Formulierung der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung sein. Wir werden uns im folgenden auf eine effektive Wechselwirkung beschränken, die die wesentlichen bekannten Eigenschaften von Kernmaterie (z.B. Saturationsdichte und Bindungsenergie) richtig wiedergibt.

Ein solches Modell ist das „Walecka-Modell“ [31], in dem die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen durch den Austausch zweier isoskalarer Mesonen σ und ω beschrieben wird. Das σ -Mesonenfeld transformiert sich unter Poincaré-Transformationen wie ein Lorentz-Skalar, das ω -Mesonenfeld wie ein Lorentz-Vektor. Die Lagrangedichte \mathcal{L} des Gesamtsystems besteht somit aus den folgenden vier Beiträgen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_\Psi + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_{\text{int}}, \\ \mathcal{L}_\Psi &= \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \not{\partial}_\mu \gamma^\mu \Psi + (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi) - m \bar{\Psi} \Psi, \\ \mathcal{L}_\sigma &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_S^2 \sigma^2) - \frac{B}{3} \sigma^3 - \frac{C}{4} \sigma^4, \\ \mathcal{L}_\omega &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_V^2 \omega_\mu \omega^\mu, \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -g_V \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \omega^\mu + g_S \bar{\Psi} \Psi \sigma.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Der Anteil \mathcal{L}_Ψ beschreibt freie Nukleonen der Masse m als relativistische Punktteilchen, wobei Ψ der Dirac-Spinor des Nukleons ist. \mathcal{L}_σ und \mathcal{L}_ω sind die Lagrangedichten für freie Mesonen der Massen m_S bzw. m_V mit den

oben erwähnten Transformationseigenschaften. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ ist der Feldstärketensor des ω -Mesons. Die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen und Mesonen wird durch den letzten Beitrag \mathcal{L}_{int} beschrieben.

Die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen für die Feldoperatoren $\hat{\sigma}$, $\hat{\omega}$ und $\hat{\Psi}$ ergeben sich durch Variation der Lagrangedichte \mathcal{L} nach den Feldern σ , ω und Ψ .

$$(\gamma^\mu(i\partial_\mu - g_V \hat{\omega}_\mu) - (m - g_S \hat{\sigma})) \hat{\Psi} = 0, \quad (1.2)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \hat{\sigma} + m_S^2 \hat{\sigma} + B \hat{\sigma}^2 + C \hat{\sigma}^3 = g_S \hat{\Psi} \hat{\Psi}, \quad (1.3)$$

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\rho} + m_V^2 \hat{\omega}^\rho = g_V \hat{\Psi} \gamma^\rho \hat{\Psi}. \quad (1.4)$$

Dieses gekoppelte System nichtlinearer Differentialgleichungen für die Feldoperatoren $\hat{\sigma}$, $\hat{\omega}$ und $\hat{\Psi}$ ist zur Zeit nicht numerisch lösbar. Wir betrachten dieses Gleichungssystem deshalb in der „Mittleren-Feld-Näherung“, in der die Mesonenfelder als klassische c -Zahl-Felder aufgefaßt werden. Dies entspricht der Ersetzung der Feldoperatoren \hat{O} in Gleichungen (1.2) – (1.4) durch deren normalgeordnete Erwartungswerte $\langle : \hat{O} : \rangle$. Weiterhin wollen wir uns auf Lösungen der Dirac-Gleichung (1.2) zu positiver Energie beschränken. Es ergibt sich somit folgendes Gleichungssystem mit der effektiven Masse $m^* := m - g_S \sigma$ und dem kinetischen Impuls $\Pi^\mu := p^\mu - g_V \omega^\mu$:

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu - m^*) \Psi = 0, \quad (1.5)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_S^2 \sigma + B \sigma^2 + C \sigma^3 = \langle : g_S \hat{\Psi} \hat{\Psi} : \rangle \equiv g_S \rho_S, \quad (1.6)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} + m_V^2 \omega^\rho = g_V \langle : \hat{\Psi} \gamma^\rho \hat{\Psi} : \rangle \equiv g_V j^\rho. \quad (1.7)$$

Wie von K. Weber gezeigt wurde [32, 33] können die in Gleichungen (1.6) und (1.7) auftretenden Ableitungsterme ∂_μ für Einschußenergien $< 5 \text{ GeV/u}$ vernachlässigt werden. Damit erhalten wir schließlich

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu - m^*) \Psi = 0, \quad (1.8)$$

$$m_S^2 \sigma + B \sigma^2 + C \sigma^3 = g_S \rho_S, \quad (1.9)$$

$$m_V^2 \omega_\mu = g_V j_\mu. \quad (1.10)$$

Die freien Parameter der Theorie, d.h. die Kopplungskonstanten der Mesonen an die Nukleonen, können nun an die bekannten Eigenschaften der Kernmaterie angepaßt werden. Dies sind insbesondere die Saturatedicht ρ_0 und die Bindungsenergie $E_b = 16 \text{ MeV/u}$. Die zwei noch verbleibenden Parameter können zur Variation der Kompressibilität K sowie der effektiven Masse m^* verwandt werden. Die in dieser Arbeit untersuchten Parametersätze sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt und beschreiben einerseits wechselwirkende Systeme mit gleicher effektiver Masse m^* (NL1 und NL2), aber unterschiedlicher Kompressibilität K , andererseits Systeme gleicher Kompressibilität bei Variation in m^* (NL1 und NL3).

	g_S	g_V	m_S [1/fm]	m_V [1/fm]	B [1/fm]	C	K [MeV]	m^*/m
NL1	6.91	7.54	2.79	3.97	-40.6	384.4	380	0.83
NL2	8.50	7.54	2.79	3.97	50.57	-6.26	210	0.83
NL3	9.50	10.95	2.79	3.97	1.589	34.23	380	0.70

Tabelle 1.1: Parametrisierungen der Lagrangedichte (1.1)

1.2 Die Transportgleichung

Ziel dieser Arbeit ist es, den Ablauf einer Schwerionenkollision vom stark anisotropen Anfangszustand zum äquilibrierten Endzustand mikroskopisch zu untersuchen. Klassisch sind Transportmodelle seit ca. 100 Jahren mit großem Erfolg verwandt worden, um Nicht-Gleichgewichts-Reaktionen zu studieren. Wir wollen deshalb die Dynamik einer Schwerionenkollision mit Hilfe einer Transportgleichung, die die zeitliche Entwicklung einer Phasenraumverteilungsfunktion $f(x, p)$ von einer gegebenen Anfangskonfiguration bestimmt, beschreiben. Dies kann natürlich nur eine Näherung an die tatsächlich ablaufenden Prozesse sein.

Auf Grund des Heisenbergschen Unschärfeprinzips ist zu erwarten, daß eine solche Beschreibung, die die gleichzeitige Angabe von Ort und Impuls nötig macht, nur für Phasenraumvolumina größer \hbar sinnvoll ist. Aus den Nukleon-Spinoren läßt sich tatsächlich ein Operator konstruieren, dessen Erwartungswert nach entsprechender Mittelung über ein Phasenraumvolumen \hbar die Eigenschaften einer klassischen Verteilungsfunktion aufweist; der Wigneroperator \hat{W} ist definiert durch:

$$\hat{W}(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-ipR/\hbar} \hat{\Psi}(x + \frac{R}{2}) \otimes \Psi(x - \frac{R}{2}). \quad (1.11)$$

Für den skalaren Anteil $\mathcal{F} = 1/4 \text{Tr} W$ der Wignermatrix $W = \langle : \hat{W} : \rangle$ erhält man die Bewegungsgleichung [34, 35]

$$(\Pi_\mu \partial_x^\mu + (g_V \Pi_\nu F^{\mu\nu} + m^*(\partial_x^\mu m^*)) \partial_\mu^\Pi) f(x, \Pi) = 0, \quad (1.12)$$

mit $f(x, \Pi) \equiv 4\mathcal{F}(x, \Pi)/m^*(x)$. Der vektorielle Anteil $\mathcal{V}_\mu = 1/4 \text{Tr} \gamma_\mu W$ ist durch die Beziehung

$$\mathcal{V}_\mu = \Pi_\mu \frac{\mathcal{F}}{m^*} \quad (1.13)$$

mit dem skalaren Anteil verknüpft. Weiterhin ergibt sich die Massenschalen Bedingung

$$(\Pi_\mu \Pi^\mu - m^{*2}) \mathcal{F} = 0. \quad (1.14)$$

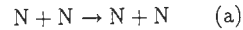
Es werden somit Quasiteilchen der Masse m^* mit dem Viererimpuls Π propagiert.

Die vorliegende Vlasov-Gleichung (1.12) beschreibt die Bewegung von Nukleonen in einem gemeinsamen mittleren Feld ähnlich einer Beschreibung durch zeitabhängiges Hartree-Fock (TDHF) und ist somit auf niederenergetische Prozesse ($E_{\text{lab}} < 10$ MeV/u) gut anwendbar. Bei höheren Energien wird die individuelle Nukleon-Nukleon Wechselwirkung immer wichtiger, da die Endzustände eines Stoßprozesses nicht länger Pauli-verboten sind. Es ist demnach notwendig, Gleichung (1.12) um die Wirkung der Zweiteilchenkorrelationen zu ergänzen. Man erhält einen Boltzmann-Stoßterm mit Pauli-Blockingfaktoren für die Endzustände der Baryonen [34]. Somit lautet die vollständige Transportgleichung:

$$\begin{aligned} & (\Pi^\mu \partial_\mu^x + (g_V \Pi_\nu F^{\mu\nu} + m^* (\partial_\mu^x m^*) \partial_\mu^\Pi)) f(x, \Pi) = I_{\text{coll}} \\ I_{\text{coll}} &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \Pi_1}{\Pi_1^0} \frac{d^3 \Pi' d^3 \Pi'_1}{\Pi'^0 \Pi'_1{}^0} (\Pi + \Pi_1)^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} \delta^{(4)}(\Pi + \Pi_1 - \Pi' - \Pi'_1) \\ & \times (f(x, \Pi') f(x, \Pi'_1) (1 - f(x, \Pi)) (1 - f(x, \Pi_1)) \\ & - f(x, \Pi) f(x, \Pi_1) (1 - f(x, \Pi')) (1 - f(x, \Pi'_1))) . \quad (1.15) \end{aligned}$$

1.3 Der N-N Wirkungsquerschnitt

Die korrekte Beschreibung von Schwerionenkollisionen in einem Energiebereich von ca. 1 GeV/u macht die Einbeziehung inelastischer Kanäle in die Berechnung des Nukleon-Nukleon Wirkungsquerschnitts $d\sigma/d\Omega$ notwendig. Wir berücksichtigen daher neben der elastischen Nukleon-Nukleon Streuung



auch die folgenden inelastischen Kanäle



sowie die elastischen Reaktionen



Die Berechnung der Übergangsmatrixelemente sollte auf demselben Niveau erfolgen wie die der mittleren Felder σ und ω . Obwohl erste Ansätze hierzu bereits verfolgt werden, ist bislang noch kein befriedigendes Ergebnis erreicht worden. Wir wählen deshalb die von Cugnon angegebene Parametrisierung

der freien Wirkungsquerschnitte [10], die in Simulationen von Schwerionenkollisionen die experimentell gemessenen Rapiditätsverteilungen dN/dY gut reproduzieren [36, 37]. Dies ist ein Hinweis darauf, daß in-Medium Korrekturen der Übergangsamplituden keine große Bedeutung zukommt, bzw. daß sich in-Medium Effekte gegenseitig nahezu kompensieren. Die Parametrisierungen lauten (vergl. [38]) mit \sqrt{s} in GeV und σ in mb:

$$\begin{aligned} \sigma_{NN}^e(\sqrt{s}) &= \frac{55}{1 + 100 \left(\frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_0^e}}{\sqrt{s_0^e}} \right)^2} \quad \text{für} \quad \sqrt{s} < \sqrt{s_0^e} \\ &= \frac{35}{1 + 100 \left(\frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_0^e}}{\sqrt{s_0^e}} \right)^2} + 20 \quad \text{für} \quad \sqrt{s} \geq \sqrt{s_0^e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{N+N \rightarrow N+\Delta}^{\text{in}}(\sqrt{s}) &= 0 \quad \text{für} \quad \sqrt{s} < \sqrt{s_0^{N+N \rightarrow N+\Delta}} \\ &= \frac{20 \left(\sqrt{s} - \sqrt{s_0^{N+N \rightarrow N+\Delta}} \right)^2}{0.015 + \left(\sqrt{s} - \sqrt{s_0^{N+N \rightarrow N+\Delta}} \right)^2} + 20 \quad \text{für} \quad \sqrt{s} \geq \sqrt{s_0^{N+N \rightarrow N+\Delta}} \end{aligned}$$

für die Reaktionen (a) und (b). Hierbei bezeichnet s_0 die „Schwellenenergie“ für den jeweiligen Prozess:

$$\begin{aligned} s_0^e &= m_1 + m_2 + 0.02 \\ s_0^{N+N \rightarrow N+\Delta} &= 2m_N + m_\pi \end{aligned}$$

Die elastischen Prozesse (d) und (e) werden analog (a) behandelt, während die Rückreaktion (c) gemäß „detailed balance“ durch

$$\sigma_{N+\Delta \rightarrow N+N}^{\text{in}}(\sqrt{s}) = \frac{p_f^2}{p_i^2} \frac{1}{8} \sigma_{N+N \rightarrow N+\Delta}^{\text{in}}(\sqrt{s}) \quad (1.16)$$

gegeben ist, wobei p_f und p_i den CM-Impuls im End- bzw. Anfangskanal bezeichnen.

Kapitel 2

Numerische Implementation

2.1 Die Diskretisierung des Problems

Die numerische Lösung von Gleichung (1.15) erfolgt mittels der „Testteilchenmethode“. Dabei wird die Lorentz-skalare Phasenraumverteilungsfunktion $f(x, \Pi)$ durch eine Summe von δ -Funktionen approximiert:

$$f(\mathbf{r}, \Pi; t) \sim \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{NA} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta^{(3)}(\Pi - \Pi_i(t)). \quad (2.1)$$

Jeder Summand in Gleichung (2.1) liefert einen Beitrag für einen Phasenraumpunkt (\mathbf{r}_i, Π_i) und läßt deshalb die Interpretation eines Teilchens am Ort \mathbf{r}_i , das sich mit dem Impuls Π_i bewegt, zu. Eine direkte Verbindung dieser „Testteilchen“ zu den „wirklichen“ Nukleonen ist jedoch nicht sinnvoll, da die „Testteilchen“ lediglich eine mittlere Phasenraumdicke von Quasiteilchen approximieren.

Wir suchen nun eine Vorschrift, wie sich die Phasenraumpunkte (\mathbf{r}_i, Π_i) in der Zeit transformieren. Diese erhält man leicht mittels des Liouvilleschen Theorems:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} f(x, \Pi) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Pi^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \Pi^\mu} \right) f(x, \Pi) &= 0 \end{aligned}$$

mit der Vierergeschwindigkeit

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = u^\mu \quad (2.2)$$

und der Viererkraft

$$\frac{\partial \Pi^\mu}{\partial \tau} = F^\mu. \quad (2.3)$$

Der Vergleich mit der Vlasov-Gleichung (1.12) liefert demnach die folgenden Bewegungsgleichungen für die „Testteilchen“

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} &= \frac{\Pi_i}{\Pi_i^0}; \\ \frac{\partial \Pi_i^k}{\partial t} &= g_V \frac{\Pi_i^\mu}{\Pi_i^0} F_\mu^k(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{\Pi_i^0} m^*(\mathbf{r}_i) \partial_x^k (m^*(\mathbf{r}_i)); \quad k = 1, 2, 3;\end{aligned}\quad (2.4)$$

mit $m^* := m - g_S \sigma$ sowie $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$.

Zusätzlich zu der Bewegung in einem mittleren Potential können die Teilchen auch durch Stöße aus dem Phasenraumelement $f(\mathbf{r}, \Pi) \Delta^3 \mathbf{r} \Delta^3 \Pi$ hergestreut werden. Dies wird durch die rechte Seite von Gleichung (1.15) berücksichtigt. Die zeitliche Diskretisierung des Problems zerfällt demnach in zwei getrennte Schritte: den „glatten“ Teilchenfluß, beschrieben durch Gleichungen (2.4) und (2.5), sowie die Wirkung des Kollisionsterms. Die Behandlung des letzteren wird weiter unten ausführlich diskutiert.

Weiterhin müssen in jedem Zeitschritt die Mesonenfelder σ und ω nach jeder Änderung der Teilchenkoordinaten und Impulse selbstkonsistent neu berechnet werden. Dazu werden die Mesonenfelder auf einem Gitter der Maschenweite $\Delta s \approx 1$ fm diskretisiert. Hierbei ist zu beachten, daß die Quellterme in den Mesonenfeldgleichungen (1.9) und (1.10) direkt mit der Teilchenverteilung verbunden sind. Um die Gradienten der Mesonenfelder, die in die Bewegungsgleichungen der Testteilchen eingehen, mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen wäre eine sehr große Zahl von Testteilchen notwendig. Dies ist aus rechentechnischen Gründen jedoch nicht möglich. Wir werden deshalb in Abschnitt 2.3 ein Verfahren zur Glättung der Quellterme vorstellen.

2.2 Das Stoßintegral

2.2.1 Theoretische Einführung

Bevor wir die numerische Behandlung des Stoßintegrals diskutieren, soll zum besseren Verständnis seiner Struktur eine phänomenologische Herleitung auf der Basis der relativistischen kinetischen Theorie vorgestellt werden [39]. Eine strenge Herleitung auf der Grundlage der quantenmechanischen Vielteilchentheorie findet sich beispielsweise in [34, 40, 41].

Die Zahl der Teilchen in einem Phasenraumvolumen $\Delta^3 \mathbf{x} \Delta^3 \mathbf{p}$ wird sich auf Grund von Kollisionen in einem Zeitintervall Δt durch Herausstreuen von Teilchen aus dem Impulsintervall $\Delta^3 \mathbf{p}$ verringern („Loss“), sowie durch den inversen Prozess des Hineinstreuens vergrößern („Gain“). Um diese Korrektur zu dem freien Fluß der Vlasov-Gleichung herzuleiten, betrachten wir die

Reaktion

$$(p^\mu, p_1^\mu) \rightarrow (p'^\mu, p_1'^\mu)$$

unter der Annahme, daß höhere Teilchenkorrelationen vernachlässigt werden können („Stoßzahlansatz“). Dann ist die Zahl der Reaktionen dieses Typs in einem gegebenen Raumzeitelement $\Delta^4 x \equiv \Delta t \Delta^3 \mathbf{x}$ am Ort \mathbf{r} proportional zu

- der mittleren Zahl von Teilchen pro Volumeneinheit mit Impulsen im Intervall $[p, p + \Delta p]$, demnach $\Delta^3 p f(\mathbf{x}, p)$
- der mittleren Zahl von Teilchen pro Volumeneinheit mit Impulsen im Intervall $[p_1, p_1 + \Delta p_1]$, demnach $\Delta^3 p_1 f(\mathbf{x}, p_1)$
- dem Endzustands-Phasenraum $\Delta^3 p' \cdot \Delta^3 p_1' \cdot \Delta^4 x$.

Der Proportionalitätsfaktor sei mit $W(p, p_1 | p', p_1') / p^0 p_1^0 p'^0 p_1'^0$ bezeichnet. Die Größe $W(p, p_1 | p', p_1')$ wird die Übergangsrate genannt. $W(p, p_1 | p', p_1')$ hängt lediglich von den Viererimpulsen des Anfangs- und Endzustandes ab und ist ein Lorentzskalar. Weiterhin ist $W(p, p_1 | p', p_1')$ symmetrisch unter Austausch der Kollisionspartner.

Wesentlich — speziell für die spätere numerische Behandlung des Kollisionsterms — ist die Annahme, daß die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, p)$ sich im Intervall $\Delta^4 x$ nur schwach ändert. Dies führt dazu, daß die Verteilungsfunktion für beide stoßenden Teilchen am gleichen Ort \mathbf{x} ausgewertet wird. Die Übergangsrate $W(p, p_1 | p', p_1')$ selbst ist ortsunabhängig. Um die Gesamtzahl von Teilchen im Impulsintervall $[p, p + \Delta p]$ zu erhalten, die aus dem betrachteten Phasenraumvolumen herausgestreut werden, integrieren wir nun über alle möglichen Stoßpartner p_1 und alle Endzustände p', p_1' . Weiterhin ist zu beachten, daß Teilchen nicht in bereits besetzte Phasenraumelemente gestreut werden dürfen (Pauli-Prinzip). Dies wird durch Einführung der Pauli-Blocking-Faktoren $(1 - f(\mathbf{x}, p'))(1 - f(\mathbf{x}, p_1'))$ erreicht, die eine Kollision proportional zur Besetzung des Endzustands-Phasenraums unterdrücken.

Wir erhalten somit für den „Loss-Term“

$$\begin{aligned}\frac{2}{(2\pi)^3} \Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0} \int \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p'}{p'^0} \frac{d^3 p_1'}{p_1'^0} W(p, p_1 | p', p_1') \\ \times f(\mathbf{x}, p) f(\mathbf{x}, p_1) (1 - f(\mathbf{x}, p')) (1 - f(\mathbf{x}, p_1'))\end{aligned}\quad (2.6)$$

Unter Beachtung der Symmetrie der Rückreaktion ergibt sich für den „Gain-Term“

$$\begin{aligned}\frac{2}{(2\pi)^3} \Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0} \int \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p'}{p'^0} \frac{d^3 p_1'}{p_1'^0} W(p', p_1' | p, p_1) \\ \times f(\mathbf{x}, p') f(\mathbf{x}, p_1') (1 - f(\mathbf{x}, p)) (1 - f(\mathbf{x}, p_1))\end{aligned}\quad (2.7)$$

wobei $W(p', p_1' | p, p_1) \equiv W(p, p_1 | p', p_1')$. Die Differenz aus Gain- und Loss-Term liefert nun den vollständigen Kollisionsterm.

2.2.2 Lösungsverfahren

„Full-Ensemble“

Um das Kollisionsintegral in Gleichung (1.15) zu lösen, folgen wir der eben dargelegten Interpretation des Stoßterms. Wir betrachten die Testteilchenverteilung als ein „relativistisches Gas“, dessen Konstituenten untereinander Stöße ausführen können, sobald sie sich genügend nahe gekommen sind. Dieser minimale Abstand ist durch den Wirkungsquerschnitt am „Low-Energy-Cutoff“ $\sigma_0 = 55 \text{ mb}$ gegeben. Um die korrekte Übergangsrate zu erhalten (d.h. die Zahl der Kollisionen pro Nukleon), muß dieser Querschnitt noch mit der Zahl der Testteilchen pro Nukleon N skaliert werden, so daß der reduzierten Wirkungsquerschnitt durch $\sigma_0/N \equiv 55 \text{ mb}/N$ bestimmt ist.

Für ein gegebenes Paar von Testteilchen, das diese Bedingung erfüllt, wird sodann der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma(\sqrt{s})$ berechnet und so die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen möglichen Prozesse bestimmt. Danach werden, entsprechend dem relativen Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt, zufällig ein Kanal ausgewählt und ebenso die Endzustandsimpulse den Teilchen zugeordnet.

Zur Berücksichtigung des Pauli-Prinzips müssen jetzt noch die Pauli-Blocking-Faktoren $1 - f$ berechnet werden. Ein abschließender Monte-Carlo-Schritt wichtet nun jede Kollision mit der Wahrscheinlichkeit, daß sie stattfindet.

Im Limes $N \rightarrow \infty$ erhalten wir offensichtlich die Lokalität zurück, mit der der Kollisionsterm formuliert ist. (Alle Verteilungsfunktionen f werden am gleichen Punkt im Konfigurationsraum ausgewertet.) Ebenso offensichtlich ist die Komplexität des Algorithmus: In jedem Zeitschritt müssen $(A \cdot N) \cdot (A \cdot N - 1)/2$ Testteilchenkoordinaten verglichen werden. Demnach wird die Rechenzeit wie $\mathcal{O}((A \cdot N)^2)$ anwachsen. Da die Wechselwirkung jedoch auf ein Volumen von $\approx (\sigma_0/N\pi)^{3/2}$ beschränkt ist, ist es möglich, dieses Verhalten zu verbessern. Wir ordnen die Testteilchen dazu entsprechend ihrer räumlichen Koordinaten in ein Gitter mit geeignet gewählter Maschenweite (hier bietet sich das schon vorhandene Mesonenfeldgitter an). Nur Teilchen innerhalb einer Gitterzelle sowie diejenigen in benachbarten Gitterzellen können untereinander Stöße ausführen. Die Breite der Wechselwirkungszone zwischen aneinanderstoßenden Gitterzellen ist durch $2\sqrt{\sigma_0/N\pi}$ gegeben. Durch diese Vorsortierung der Testteilchen vermindert sich der Rechenzeitbedarf auf $\mathcal{O}(A \cdot N^2)$.

„Parallel-Ensemble“

Der Rechenzeitbedarf der Full-Ensemble-Methode wächst quadratisch mit der Anzahl der Testteilchen pro Nukleon N . Ein Verfahren, für das die Rechenzeit nur linear mit N ansteigt, wurde von Bertsch [38] vorgeschla-

gen. Ausgangspunkt dieses Algorithmusses ist die Idee von N unabhängigen Nukleonen-Kaskaden, die parallel berechnet werden. Jede dieser Kaskaden wird als ein Ereignis einer Reaktion $A_1 + A_2$ aufgefasst. Lediglich für die Berechnung der Potentiale werden diese unabhängigen Runs zu einer mittleren Nukleonenverteilung zusammengefasst um glatte Dichteverteilungen zu erhalten. Jede einzelne dieser Nukleonen-Kaskaden kann nun so behandelt werden, wie für die Full-Ensemble-Methode bereits dargelegt; der Wirkungsquerschnitt kann natürlich nicht mit einem Faktor N skaliert werden, ein Sortieren der Testteilchen ist deshalb wegen des großen Wechselwirkungsbereichs der Nukleonen nicht vorteilhaft. Die Komplexität des Algorithmus ist offensichtlich von der Ordnung $\mathcal{O}(A^2 \cdot N)$. Leider kann dieses Verfahren auch für $N \rightarrow \infty$ keine Lösungen der Boltzmann-Gleichung liefern, denn die Lokalität des Kollisionsintegrals ist explizit verletzt. Es sei noch einmal nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die Einteilung der $N \cdot A$ Testteilchen in N Ensemble zu A „Nukleonen“ künstlich ist und nichts mit der Lösung von Gleichung (1.15) zu tun hat. Vom numerischen Standpunkt aus gesehen wäre auch jede andere Einteilung in Ensemble möglich — ein sogenanntes „Hybridverfahren“. Diese verschiedenen Verfahren, und speziell die Unterschiede in den mit ihnen erhaltenen Lösungen, wurden von Welke et al. [42] ausführlich untersucht. Diese Autoren fanden, daß zumindest für die Simulation von Schwerionen-Kollisionen die Full-Ensemble- und Parallel-Ensemble-Methode vergleichbare Ergebnisse liefern.

„Local-Ensemble“

Die beiden oben dargelegten Verfahren wurden in den letzten Jahren von verschiedenen Gruppen zur Lösung von BUU-Gleichungen mit Erfolg angewandt. Beide Verfahren haben aber, wie wir dargelegt haben, schwerwiegende Nachteile, sowohl konzeptioneller Art wie auch vom numerischen Aufwand her. Wir wollen nun ein neues Verfahren vorstellen, daß bereits in anderen Gebieten der Physik mit Erfolg angewendet wird [43]. Dieser Algorithmus hat eine Komplexität der Ordnung $\mathcal{O}(A \cdot N)$ und man kann zeigen, daß die mit ihm gewonnenen Lösungen (im Grenzwert $N \rightarrow \infty, \Delta^3 x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$) zu exakten Lösungen der Boltzmann-Gleichung konvergieren. Wir werden diesen Algorithmus als „Local-Ensemble-Methode“ bezeichnen.

Wir gehen dabei von der folgenden Annahme aus: Die Phasenraumdichte $f(x, \Pi)$ sei, auf einer geeignet gewählten Skala, eine nur schwach veränderliche Funktion des Vierer-Vektors x . Wir haben diese Annahme bereits bei der Herleitung von Gleichung (1.15) sowie bei der Diskretisierung der Mesonenfelder gemacht. Für einen gegebenen Zeitschritt ist es nun möglich, die Verteilungsfunktion durch stückweise konstante Funktionen — d.h. nur noch

vom Impuls abhängig — zu approximieren:

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \Pi) := \sum_i \delta_i f_i(\Pi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_i = 1, \text{ für } \mathbf{r} \in \text{Volumen-Element } i \\ \delta_i = 0, \text{ sonst} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Somit ist für jeden Gitterpunkt nur noch eine ortsunabhängige Boltzmann-Gleichung zu lösen.

Um die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion für ein Paar von Testteilchen in einer Gitterzelle zu erhalten, gehen wir von der Definition des Wirkungsquerschnitts für einen Nukleon-Nukleon-Stoß aus:

$$\begin{aligned} \sigma &:= \frac{dN_{\text{scat}}/dt}{j_2 \cdot N_1} \\ &= \frac{\text{gestreute Teilchen/Zeit}}{\text{einfallenden Strom} \cdot \text{Anzahl der Streuzentren}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

im Targetsystem. Die Viererimpulse von Projektil (2) und Target (1) sind

$$p_2 = (p_2^0, \mathbf{p}_2); \quad p_2^0 = \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2} \quad (2.10)$$

$$p_1 = (m_1, \mathbf{0}). \quad (2.11)$$

Damit gilt im Targetsystem

$$\frac{\Delta N_{\text{scat}}}{\Delta t} = \sigma j_2 N_1 = \sigma \rho_2 \frac{|\mathbf{p}_2|}{p_2^0} \rho_1 \Delta^3 x \quad (2.12)$$

mit Target- bzw. Projektilsdichte ρ_1 und ρ_2 . Mit Hilfe der Lorentz-invarianten Funktion $\lambda(s, m_1^2, m_2^2)$ läßt sich der Impuls des Projektils im Targetsystem $|\mathbf{p}_2|$ als

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_2| &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2m_1} \\ \lambda(x, y, z) &= (x - y - z)^2 - 4yz. \end{aligned}$$

schreiben. Durch Division mit dem (dreidimensionalen) Volumenelement $\Delta^3 x$ erhält man nun auf der linken Seite von Gleichung (2.12) einen Lorentz-invarianten Ausdruck:

$$\frac{\Delta N_{\text{scat}}}{\Delta^4 x} = \sigma \rho_2 \rho_1 \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2m_1 p_2^0}.$$

Auch die rechte Seite muß sich als Lorentz-Skalar ausdrücken lassen. Schreibt man nun die Energie des Targets im Targetsystem m_1 als $p_1^0 = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2}$ mit $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$, ist dies offensichtlich der Fall. In einem beliebigen Bezugssystem gilt somit

$$\frac{\Delta N_{\text{scat}}}{\Delta^4 x} = \sigma \rho_2 \rho_1 \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2p_1^0 p_2^0}. \quad (2.13)$$

Die gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit für ein Paar von Nukleonen ergibt sich durch $\mathcal{W} = \Delta N_{\text{scat}}/N_2 N_1$. Wir müssen jetzt noch berücksichtigen, daß die Nukleonendichten durch Testteilchen dargestellt werden. Sei N die Zahl der Testteilchen pro Nukleon. Es gilt somit für die Reaktionswahrscheinlichkeit zweier Testteilchen $W = (\Delta N_{\text{scat}} N)/(N_2 N)(N_1 N) = \mathcal{W}/N$:

$$W = \frac{\sigma(s, m_1, m_2)}{N} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2p_1^0 p_2^0} \frac{\Delta t}{\Delta^3 x}. \quad (2.14)$$

Die Motivation für die Lösung des Stoßintegrals mittels Übergangsraten war die Ableitung eines Algorithmuses, der eine Komplexität von $\mathcal{O}(A \cdot N)$ hat, im Gegensatz zu den herkömmlichen Verfahren. Dieses Ziel haben wir bislang jedoch noch nicht erreicht. Um die korrekte Stoßrate zu erhalten, muß für jede mögliche Paarung in einer Zelle die Übergangswahrscheinlichkeit berechnet werden; dies ist wieder ein N^2 -Problem. Ist die Stoßwahrscheinlichkeit nun gering — d.h. nur wenige Testteilchen werden während eines Zeitschrittes miteinander kollidieren — reicht es aus, nur einen (repräsentativen) Anteil aller möglicher Paare zu betrachten. Diese haben dann natürlich eine entsprechend höhere Wahrscheinlichkeit für einen Stoß. Wir wählen deshalb in jedem Zeitschritt aus den $n(n-1)/2$ möglichen Paarungen in einer Zelle (n sei die Anzahl der Testteilchen in der Zelle $\Delta^3 x$) zufällig eine Permutation von $\lfloor n/2 \rfloor$ Kollisionspartnern. ($\lfloor \cdot \rfloor$ bezeichnet die nächstkleinere ganze Zahl). Somit erhält (für n gerade) jedes Testteilchen einen Stoßpartner. Um die korrekte Übergangsrate bei Beschränkung auf dieses Ensemble zu erhalten ist jetzt die Stoßwahrscheinlichkeit W' ,

$$W' := W \frac{n(n-1)/2}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (2.15)$$

zu verwenden. Im Limes $\Delta^3 x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ konvergieren die Lösungen, die man mit diesem Algorithmus erhält, gegen die exakten Lösungen der Boltzmann-Gleichung [44, 45]. Weiterhin ist die angegebene Vorschrift offensichtlich kovariant. Da wir hier mit Übergangsraten arbeiten und, im Gegensatz zu den bisher verwandten Methoden, keine geometrische Interpretation des Stoßprozesses verwenden, treten auch keinerlei Probleme bezüglich der Zeit-Ordnung der Kollisionen auf.

Das Pauli-Blocking

Wie bereits dargelegt, sind nicht alle möglichen NN-Stöße erlaubt. Ist der Phasenraum für das gestreute Teilchen bereits besetzt, so ist die Kollision „Pauli-geblockt“. Bei jeder Kollision müssen also für beide Teilchen die Pauli-Blocking-Faktoren $(1 - f(x, p))$ berechnet werden. Dies geschieht durch Mit-

teilung der Testteilchenverteilung über ein geeignet gewähltes Phasenraumvolumen V . Sei n die Zahl der Nukleonen in V . Dann gilt offensichtlich

$$f = \frac{(2\pi\hbar)^3 n}{V^4}, \quad (2.16)$$

da für $V = (2\pi\hbar)^3$ und $n = 4$ das Phasenraumvolumen vollständig besetzt ist.

Das Problem, die Phasenraumverteilung zu berechnen, reduziert sich somit auf das Zählen aller Teilchen in einem gegebenen Orts- und Impulsraumintervall.

Leider wächst der Rechenzeitbedarf wieder quadratisch, d.h. $\mathcal{O}((A \cdot N)^2)$. Wir ordnen deshalb unsere Testteilchen entsprechend ihrer Ortskoordinaten physikalisch im Speicher an und erstellen uns ein Zeigerfeld, das es erlaubt gezielt alle Teilchen in einer (räumlichen) Zelle zu adressieren. Demnach müssen nur noch alle Testteilchen in einer Zelle miteinander verglichen werden. Die physikalische Anordnung der Teilchen im Speicher ermöglicht weiterhin eine sehr gute Ausnutzung des Prozessor-Caches.

Werden die Blocking-Faktoren sehr oft benötigt, (wie z.B. für die Teilchenproduktion, die die Integration über die Endzustände der Baryonen beinhaltet) empfiehlt es sich, ein Impulsraumgitter anzulegen. Da im Local-Ensemble-Algorithmus alle Kollisionen lokal in einer räumlichen Gitterzelle stattfinden, benötigt man nur noch ein dreidimensionales Gitter, das man für jeden Ortspunkt neu verwenden kann.

2.2.3 Vergleich der Lösungsverfahren

Wir wollen nun die Ergebnisse, die unter Verwendung der oben vorgestellten Algorithmen gewonnen wurden, miteinander vergleichen. Wir wählen dazu das System $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$, $E_{\text{Lab}} = 1 \text{ GeV/u}$, Stoßparameter $b = 2.3 \text{ fm}$, mit 1000 Testteilchen pro Nukleon als typisches Beispiel für die derzeit untersuchten Reaktionen.

Die erste Größe, die wir vorstellen, ist die Anzahl der Kollisionen während eines Zeitschritts in dem zentralen Überlapp-Bereich der zwei Kerne, geteilt durch die Zeitschrittweite (d.h. die Übergangsrate), vergl. Bild 2.1. Wie man sieht, erhält man unter Verwendung des Local-Ensemble und des Full-Ensemble-Algorithmus' ungefähr dieselben Ergebnisse, während der Parallel-Ensemble-Algorithmus etwas größere Zahlenwerte liefert. In Bild 2.2 zeigen wir die mittlere Anzahl von Kollisionen pro Teilchen als Funktion der Zeit. Auch hier erhält man mit dem Parallel-Ensemble-Algorithmus ca. 15%-20% größere Zahlenwerte als mit den anderen Verfahren.

Um zu entscheiden, ob die festgestellten Unterschiede in den Kollisionszahlen die Reaktionsdynamik stark beeinflussen, werden wir nun einige lokale

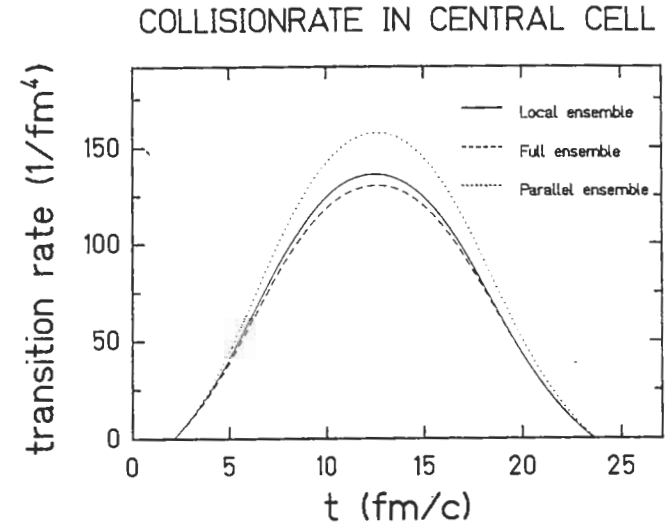


Abbildung 2.1: Übergangsrate im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u . Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

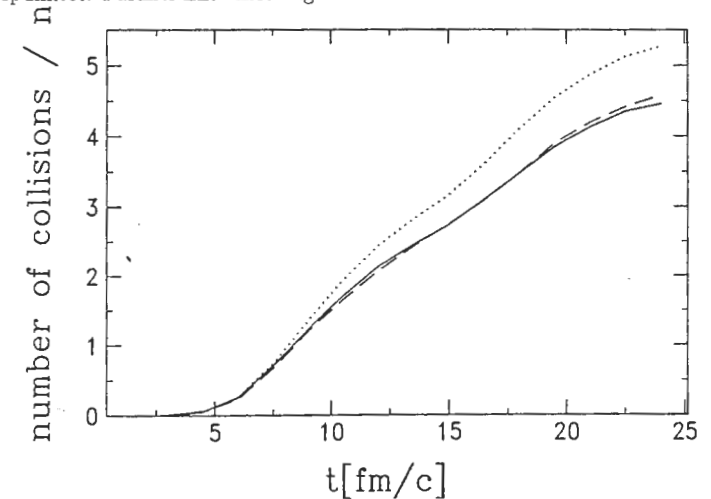


Abbildung 2.2: Mittlere Zahl der Kollisionen pro Teilchen im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u . Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

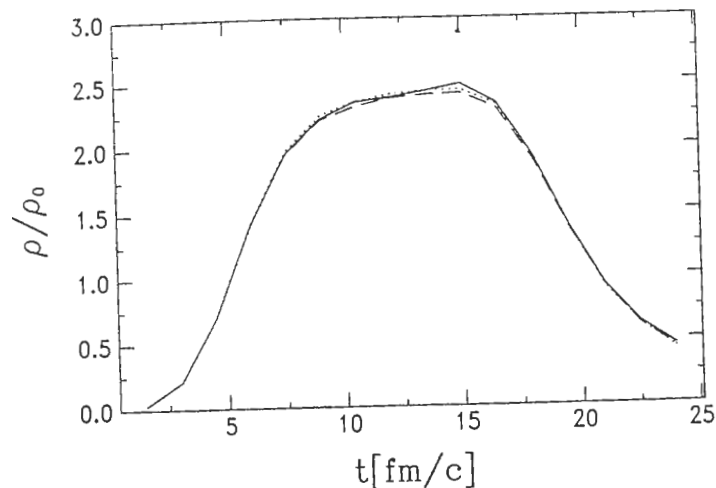


Abbildung 2.3: Dichte im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u. Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

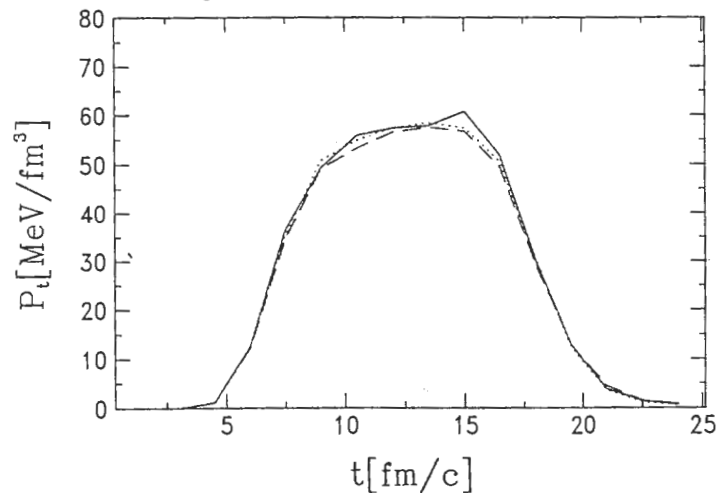


Abbildung 2.4: Transversaler Druck im zentralen Überlapp-Bereich für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u. Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

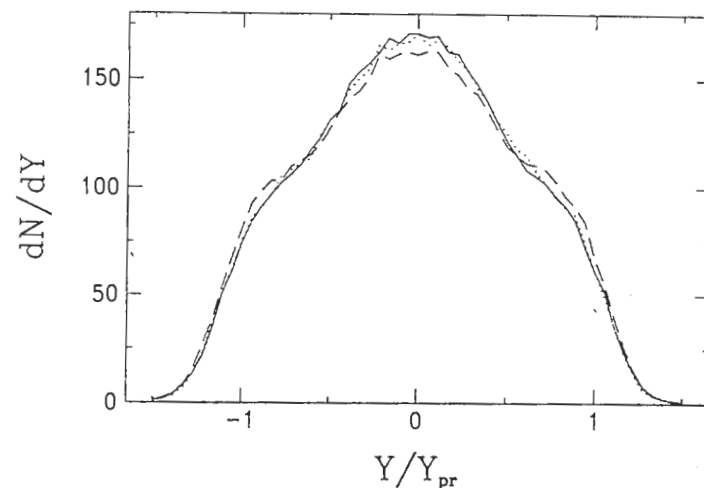


Abbildung 2.5: Rapidityverteilung dN/dY für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u. Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

Observablen des Systems miteinander vergleichen. Selbst bei geringfügigen Unterschieden in der Verteilung der Kollisionszahlen kann die Reaktionsdynamik stark beeinflusst werden, da absolut verschiedene Bereiche des Phasenraums ausgetestet werden könnten. Wir zeigen in Bild 2.3 die Dichte-Entwicklung und in Bild 2.4 den transversalen Druck in dem zentralen Überlapp-Bereich. Zur Berechnung des transversalen Drucks vergleiche Kapitel 3. Da der transversale Druck P_t erst während der Reaktion aufgebaut wird, könnte er auf den verwendeten Kollisionsalgorithmus sensitiv sein. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie man in Bild 2.4 erkennen kann. Die Ergebnisse aller drei Verfahren stimmen sowohl für die Dichte wie für den transversalen Druck im Bereich der numerischen Genauigkeit perfekt überein. Dies zeigt erneut, daß der Parallel-Ensemble-Algorithmus eine gute Approximation an die „exakte“ Lösung bietet.

Die oben dargestellten Größen sind leider nicht experimentell meßbar. Wir wollen deshalb unseren Vergleich mit zwei Observablen beschließen, die man allgemein als sehr wichtig ansieht und die leicht experimentell zugänglich sind: Die Rapidityverteilung dN/dY [46] und den transversalen Fluß p_x/A [6]. Erstere wird allgemein dazu verwandt, Informationen über mögliche in-medium Korrekturen des Nukleon-Nukleon Wirkungsquerschnitts zu erhalten, von letzterem wird angenommen, daß er auf den Einfluß des mittleren Feldes sensitiv ist. Wie man aus Abbildungen 2.5 und 2.6 erkennen kann, liefern alle drei Verfahren identische Ergebnisse für beide Observablen. Wir

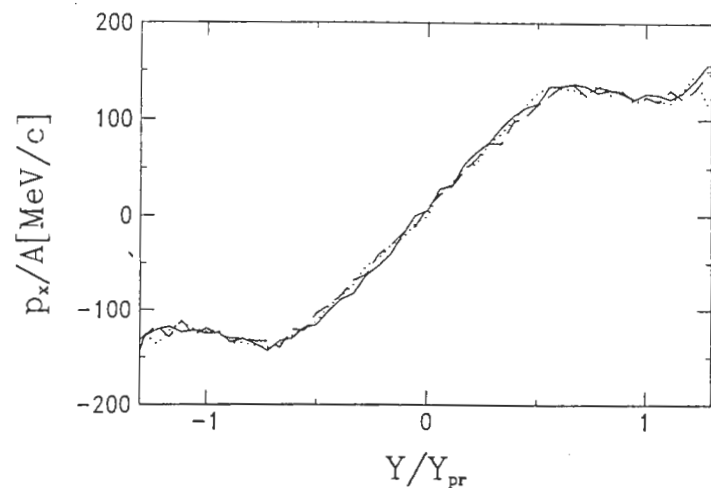


Abbildung 2.6: Transversaler Fluß für die Reaktion $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ bei 1 GeV/u. Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

können daraus schließen, daß die Reaktionsdynamik für alle drei Algorithmen identisch verläuft.

Das nun wesentliche Entscheidungskriterium dafür, welchen Algorithmus man implementiert, ist die von ihm benötigte Rechenzeit. Um den Rechenzeitbedarf der verschiedenen Algorithmen besser vergleichen zu können, stellen wir hier die Ergebnisse reiner Kaskadenrechnungen ohne Pauli-Blocking vor. In Abbildung 2.7 zeigen wir die Rechenzeit, die für einen Zeitschritt benötigt wird, für die Systeme $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ und $^{93}\text{Nb} + ^{93}\text{Nb}$ als Funktion von N (der Anzahl der Testteilchen pro Nukleon). Die lineare Abhängigkeit von N für den Parallel- und Local-Ensemble-Algorithmus ist klar zu erkennen. Für den Full-Ensemble-Algorithmus wächst die Rechenzeit offensichtlich quadratisch mit N . Trotzdem ist die Rechenzeit für die Full-Ensemble-Methode vergleichbar mit der Parallel-Ensemble-Methode, für bestimmte Testteilchenzahlen erweist sie sich sogar als vorteilhafter. Beide Verfahren sind jedoch deutlich langsamer als der Local-Ensemble-Algorithmus. Dieser ist bei 2500 Testteilchen pro Nukleon bereits einen Faktor 10 (im Vergleich zum Full-Ensemble-Verfahren) bzw. einen Faktor 6 (im Vergleich zum Parallel-Ensemble-Verfahren) schneller.

Abschließend wollen wir noch die Abhängigkeit der Rechenzeit von der Projektil-Masse für symmetrische Systeme vorstellen. Diese ist in Abbildung 2.8 gezeigt. Man erkennt deutlich den linearen Anstieg für den Full-Ensemble und den Local-Ensemble-Algorithmus, während die Rechenzeit für

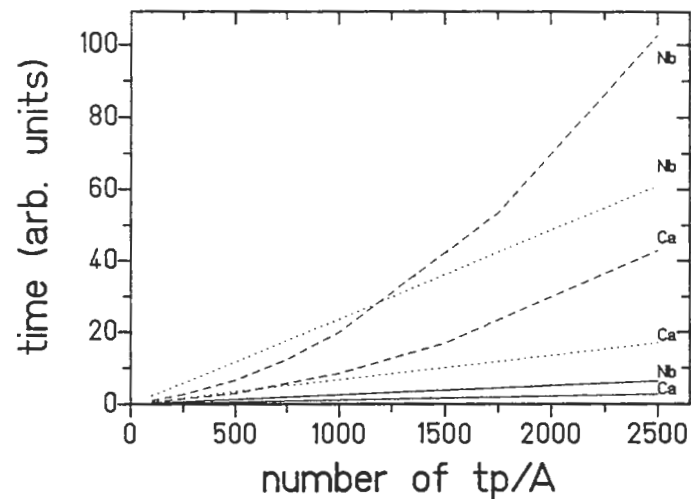


Abbildung 2.7: Rechenzeit als Funktion der Testteilchen/A für Nb + Nb und Ca + Ca. Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

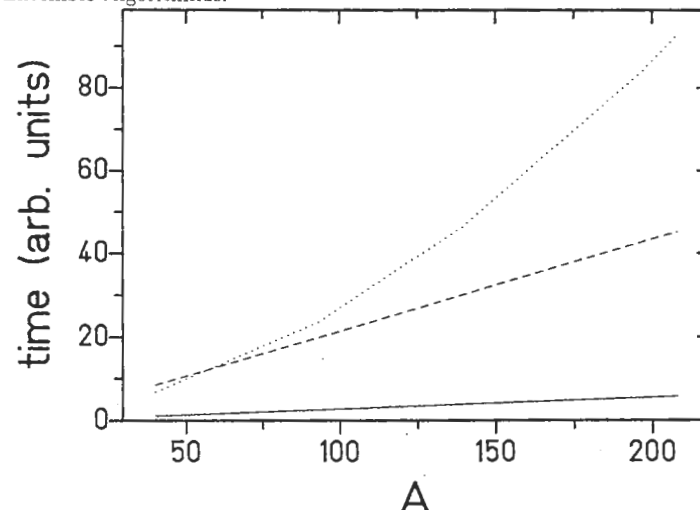


Abbildung 2.8: Rechenzeit als Funktion der Projektilmasse für 1000 Testteilchen/A. Durchgezogen: Local-, Gestrichelt: Full-, Gepunktet: Parallel-Ensemble-Algorithmus.

den Parallel-Ensemble-Algorithmus quadratisch wächst. Dies unterstreicht nochmals die Stärke des Full-Ensemble-Verfahrens, da zukünftige Experimente bevorzugt mit hohen Massenzahlen durchgeführt werden.

2.3 Das Glätten der Queldichten

Ein Problem der Testteilchenmethode besteht darin, daß wegen der endlichen Anzahl N der Teilchen stets mit statistischen Fluktuationen in den Quelltermen der Mesonenfelder zu rechnen ist. Diese Fluktuationen haben einen Einfluß auf die Reaktionsdynamik, da sich die auf die Testteilchen wirkenden Kräfte aus den Gradienten der Potentiale berechnen. Diese Potentiale sind dichteabhängig und damit sensitiv auf Fehler in der Dichteberechnung. Dieses Problem ist speziell in dem relativistischen Ansatz von besonderer Bedeutung, da sich das Potential, daß die Nukleonen letztendlich spüren, aus der Differenz der beiden betragsmäßig sehr großen Mesonenfeldern ergibt. Kleine statistische Fehler in der Berechnung der einzelnen Felder können somit dieselbe Größenordnung erreichen wie das resultierende Potential und machen deshalb eine hohe statistische Genauigkeit unverzichtbar.

Sei \bar{N}_V die mittlere Anzahl von Testteilchen in einer Gitterzelle, so gilt für die relative Fluktuation

$$\frac{\Delta N_V}{N_V} \sim \frac{1}{\sqrt{\bar{N}_V}}. \quad (2.17)$$

Leider sind die zur Zeit realisierbaren Testteilchen-Zahlen nicht groß genug, um die Fluktuationen klein zu halten. Typischerweise bewegt sich \bar{N}_V zwischen 100 – 300. Die sich aus den statistischen Schwankungen ergebenden unphysikalischen Kräfte sind natürlich unerwünscht und es ist deshalb nötig, die Felder zu glätten. Wir verwenden hierzu einen von Reinhard [47] vorgeschlagenen Algorithmus. Dieser berechnet den Wert an einer Gitterzelle durch eine gewichtete Summe aus diesem Wert und den 26 nächsten Nachbarzellen (vergl. Abbildung 2.9).

Eine wichtige Forderung an unseren Glättungsalgorithmus ist, daß er die Gesamtzahl (z.B. Baryonenzahl) erhält. Er soll keine Dichte erzeugen oder vernichten. Gilt

$$\sum \text{Gewichte} = 1 \quad (2.18)$$

so ist diese Forderung erfüllt.

Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall und verallgemeinern dann auf drei Dimensionen. Der geglättete Funktionswert \tilde{f}_i an einem Gitterpunkt i sei durch Mittelung über die Nachbarpunkte gegeben:

$$\tilde{f}_i := \alpha f_{i-1} + (1 - 2\alpha) f_i + \alpha f_{i+1}, \quad (2.19)$$

wobei α ein freier Parameter ist, der die Stärke der Glättung bestimmt. Offensichtlich erfüllt diese Wahl der Gewichte die Forderung (2.18). Die Form der Gewichte für drei Dimensionen ergibt sich nun einfach aus der sukzessiven Anwendung von (2.19) für jede Dimension und läßt sich leicht mittels der entsprechenden Binominalformel ausdrücken:

$$1 = ((1 - 2\alpha) + 2\alpha)^3 = (1 - 2\alpha)^3 + 6\alpha(1 - 2\alpha)^2 + 12\alpha^2(1 - 2\alpha) + 8\alpha^3 \quad (2.20)$$

Dies führt auf die in Abbildung 2.9 gezeigte Wichtung, wobei

$$\begin{aligned} W_1 &= (1 - 2\alpha)^3 &\equiv \bullet \\ W_2 &= \alpha(1 - 2\alpha)^2 &\equiv * \\ W_3 &= \alpha^2(1 - 2\alpha) &\equiv \otimes \\ W_4 &= \alpha^3 &\equiv \blacksquare \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die optimale Glättung erhält man für $\alpha = 0.25$, da für diesen Wert gerade die höchste auf dem Gitter darstellbare Mode unterdrückt wird. Um dies zu sehen betrachten wir ein räumlich konstantes Feld X , o.B.d.A. $X \equiv 0$. Die höchste darstellbare Mode hätte demnach ein alternierendes Vorzeichen zwischen benachbarten Gitterzellen, also (o.B.d.A. $X_i = \pm 1$). Der geglättete Wert ist dann

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i &= (1 - 2\alpha)^3 - 6\alpha(1 - 2\alpha)^2 + 12\alpha^2(1 - 2\alpha) - 8\alpha^3 \\ &= ((1 - 2\alpha) - 2\alpha)^3 = 0 \quad \text{für } \alpha = 0.25. \end{aligned}$$

Betrachtet man Abbildung 2.9 genauer, so erkennt man, daß in jeder Ebene nur bestimmte geometrische Elemente zu berechnen sind: Raute und Quadrat. Dies kann unabhängig für jede Ebene geschehen. Es ist demnach möglich, den Glättungsalgorithmus sehr effektiv zu vektorisieren und zu parallelisieren.

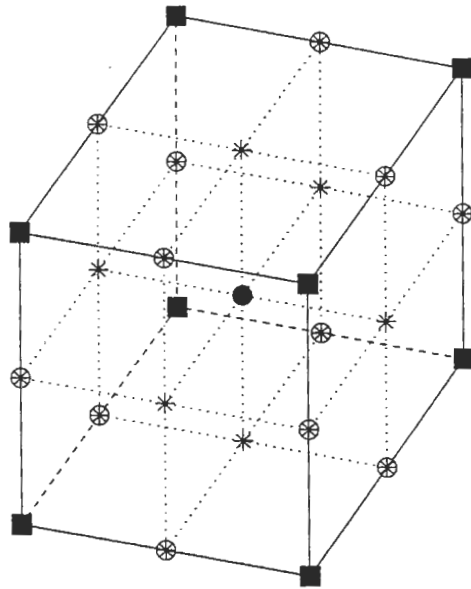


Abbildung 2.9: Wichtung der Gitterpunkte für den Glättungsalgorithmus. Bedeutung der Symbole s. Gleichung 2.21

Kapitel 3

Thermodynamische Eigenschaften

3.1 Theoretische Einführung

Um Einsicht in die lokalen thermodynamischen Größen wie den Druck $P(\mathbf{r}, t)$ und die Energiedichte $\epsilon(\mathbf{r}, t)$ des Systems zu gewinnen, berechnen wir den Energie-Impuls-Tensor, der bei gegebener Lagrangedichte \mathcal{L} allgemein durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.1)$$

definiert ist [48]. Die Auswertung von Gleichung (3.1) für die Lagrangedichte (1.1) ergibt in der Lokalen-Dichte-Näherung und nach geeigneter Symmetrisierung [49]):

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{4}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\Pi}{\Pi^0} \Pi^\mu \Pi^\nu f(x, \Pi) + m_V^2 \omega^\mu \omega^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (m_S^2 \sigma^2 + \frac{2}{3} B \sigma^3 + \frac{1}{2} C \sigma^4 - m_V^2 \omega_\rho \omega^\rho). \quad (3.2)$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors für eine ideale Flüssigkeit vorstellen. Im lokalen Ruhesystem eines Flüssigkeitselements nimmt dieser die diagonale Gestalt ($x = (\mathbf{r}, t)$)

$$T(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \epsilon(\mathbf{r}, t) & & & \\ & P_1(\mathbf{r}, t) & & \\ & & P_2(\mathbf{r}, t) & \\ & & & P_3(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

an. Hierin bezeichnet $\epsilon(\mathbf{r}, t)$ die Energiedichte und alle drei Druckkomponenten $P_i(\mathbf{r}, t) \equiv P(\mathbf{r}, t)$ sind, entsprechend dem Pascalschen Gesetz, identisch.

Für eine ideale Flüssigkeit, die sich mit der Vierergeschwindigkeit u_μ bewegt, ist der Energie-Impuls-Tensor nicht mehr länger diagonal, sondern kann als

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = (\epsilon(\mathbf{r}, t) + P(\mathbf{r}, t))u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P(\mathbf{r}, t) \quad (3.4)$$

geschrieben werden [39].

Da wir uns in dieser Arbeit nicht mit einer idealen Flüssigkeit im Gleichgewicht beschäftigen, weist der Energie-Impuls-Tensor noch einen zusätzlichen, „irreversiblen“ Beitrag $\Pi^{\mu\nu}$ auf [39]. Wir definieren nun das lokale Ruhesystem einer Zelle durch die Forderung, daß die Elemente $T^{i\nu}$ des Energie-Impuls-Tensors verschwinden. Dies entspricht einem Lorentz-Boost bzw. einer Rotation im Raum-Zeit-Kontinuum. Der Drucktensor T^{ij} wird nach einer Transformation ins lokale Ruhesystem noch nicht diagonal sein, da in einer nicht-idealen Flüssigkeit auch Scherkräfte auftreten können. Es ist natürlich möglich, auch den Drucktensor auf Diagonalgestalt zu bringen. Die drei Druck-Eigenwerte sind aber nicht mehr notwendigerweise identisch. Damit erhalten wir eine Möglichkeit des Vergleichs zur idealen Situation.

Die letzte thermodynamische Größe, die wir in dieser Arbeit besprechen wollen, ist die Entropie, die mittels

$$S(t) = -\frac{4}{(2\pi)^3} \int d^3r \int d^3\Pi (f(\mathbf{r}, \Pi; t) \ln f(\mathbf{r}, \Pi; t) + (1 - f(\mathbf{r}, \Pi; t)) \ln(1 - f(\mathbf{r}, \Pi; t))) \quad (3.5)$$

berechnet werden kann [50].

Die Auswertung dieser Gleichung ist ein schwieriges numerisches Problem, da über den gesamten Phasenraum integriert werden muß; die Berechnung der Entropie benötigt folglich fast genausoviel Rechenzeit wie die Lösung von Gleichungen (1.9), (1.10) und (1.15).

3.2 Numerische Betrachtungen

Wir wollen nun für den Augenblick annehmen, daß nach der Diagonalisierung von (3.2) alle Drücke identisch sind. Wir erwarten dann, daß sich das System im (lokalen) thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Ist dies der Fall, dann können wir es in eindeutiger Weise durch die Angabe einer Temperatur charakterisieren. Diese Temperatur könnte man beispielsweise durch Anpassung einer Fermi-Verteilung an die lokale Impulsverteilung erhalten. Wegen der begrenzten Zahl an Testteilchen in einer Zelle weisen diese lokalen, dreidimensionalen Impulsverteilungen jedoch starke statistische Fluktuationen auf. Deshalb würde dieses Verfahren zu großen Fehlern in der Temperaturbestimmung führen.

Wir haben deshalb einen alternativen Weg gewählt: Durch Inversion der Zustandsgleichung $P(\rho, T)$ für einen gegebenen Parametersatz der Lagrangendichte (1.1) erhält man die Temperatur T als Funktion der Dichte ρ und des Druckes P : $T = T(\rho, P)$. Da dieses Verfahren nur Größen verwendet, die durch Integration über den Impulsraum erhalten wurden, wird der statistische Fehler signifikant reduziert. Es sei darauf hingewiesen, daß eine wichtige Voraussetzung zur Identifikation des thermodynamischen und des aus dem Energie-Impuls-Tensor gewonnenen Drucks die thermodynamische Konsistenz des Walecka-Modells ist.

Im Allgemeinen werden die einzelnen Druck-Komponenten (bzw. die entsprechenden „Temperaturen“) des Energie-Impuls-Tensors nicht identisch sein. Durch deren Vergleich hat man nun eine — zumindestens qualitative — Möglichkeit, den Grad der lokalen Äquilibration abzuschätzen.

Um die Verlässlichkeit unseres Verfahrens zur Bestimmung der lokalen Temperatur zu demonstrieren, haben wir eine Testrechnung durchgeführt, in der die Testteilchen entsprechend einer konstanten Dichte im Konfigurationsraum verteilt wurden. Für die Initialisierung des Impulsraums wurde eine Fermi-Verteilung gewählt. Mit dieser Konfiguration simulieren wir ein Stück Kernmaterie bei der Temperatur von 75 MeV und dreifacher Saturationsdichte $\rho = 3\rho_0$. Dies sind ungefähr die maximalen Werte, die in einer relativistischen Schwerionenkollision mit Strahlenergien um 1 GeV/u erreicht werden. Wir variieren dann die Anzahl von Testteilchen in einem räumlichen Volumenelement von ungefähr 50 bis 3000; dies entspricht in etwa den Verhältnissen in der dynamischen Simulation.

In Abbildung 3.1 zeigen wir die numerisch berechnete Impulsraum-Verteilung in einem räumlichen Volumenelement im Vergleich zu der Fermi-Verteilung, die für die Initialisierung verwendet wurde. Für kleine Testteilchenzahlen sind große Fluktuationen um den exakten Wert festzustellen. Eine quantitativere Aussage über den statistischen Fehler, nämlich die Varianz σ , ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Wir haben hier das Inverse der relativen Varianz, $\sigma^2 = \sigma^2/T^2$ (berechnet aus 50 Proben) als Funktion der Probengröße N aufgetragen. Diese Kurve kann sehr gut durch $1/\sigma^2 = 1.8N$ approximiert werden. Wir haben diese Parametrisierung in unseren Berechnungen der Temperatur zur Abschätzung der Genauigkeit verwendet. Es sei darauf hingewiesen, daß man, um einen Fehler kleiner 3% zu erhalten, mindestens 600 Testteilchen pro Volumenelement benötigt. Dies bedeutet bei dreifacher Saturationsdichte und einer Zellengröße von 1 fm^3 eine Zahl von 1250 Testteilchen pro Nukleon. Die Testteilchenzahlen in Tabelle 3.1 sind daher als Minimalwerte für verlässliche Berechnungen zu verstehen. Selbstverständlich beinhaltet der eben diskutierte Fehler nicht den systematischen Fehler, der durch die Interpretation einer Nicht-Gleichgewichts-Verteilung als äquilibrierte Verteilung entsteht.

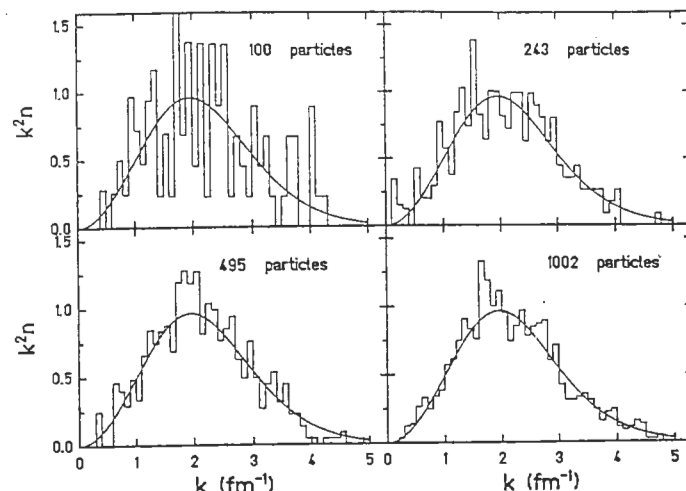


Abbildung 3.1: Impulsraum-Verteilung $n(k)$ ($T = 75$ MeV; $\rho = 3\rho_0$) in einem Volumenelement; Ordinate mit k^2 multipliziert. Durchgezogen: Fermi-Dirac Gesetz; Histogram: Approximation durch Gleichung (2.1); Die Zahl in den Bildern gibt die Zahl der Testteilchen in dem Volumen an.

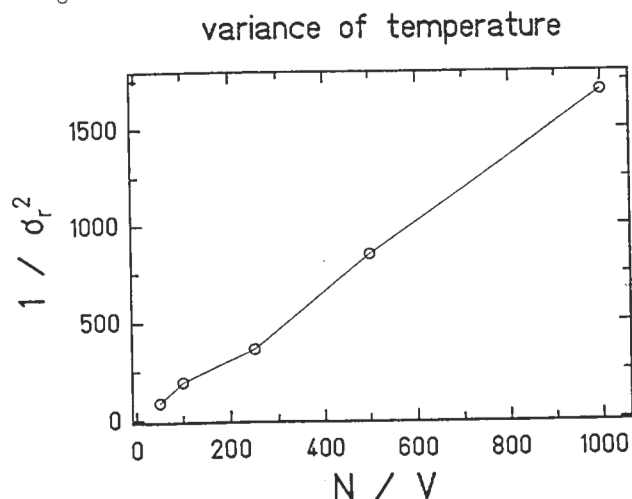


Abbildung 3.2: Statistischer Fehler in der Temperatur-Berechnung als Funktion der Probengröße.

System	$b[\text{fm}]$	$\Delta t[\text{fm}/c]$	$\Delta x[\text{fm}]$	N
Au+Au	3.0	0.100	1.0	500
Nb+Nb	2.3	0.075	0.8	1000
Ca+Ca	1.7	0.050	0.6	2500

b : Stoßparameter;
 Δt : Zeitschrittweite für Prediktor-Korrektor;
 Δx : Diskretisierungslänge für die Mesonenfelder (unkontrahiert);
 N : Zahl der Testteilchen pro Nukleon

Tabelle 3.1: Parameter für die Simulation

3.3 Zeitentwicklung

Im folgenden werden wir die Reaktionen Au+Au, Nb+Nb und Ca+Ca für die in Tabelle 3.1 zusammengestellten Parameter und die drei Parametrisierungen der Lagrangedichte (1.1) NL1-NL3 studieren. Die gewählten Strahlenergien betragen 400 MeV/u, 600 MeV/u, 800 MeV/u und 1000 MeV/u. Es sei daran erinnert, daß die Parametrisierungen NL1 und NL2 dieselbe effektive Masse m^* und somit dieselbe Impulsabhängigkeit besitzen, während NL1 und NL3 dieselbe Kompressibilität haben.

Wir wollen unsere Diskussion mit einige „Schnappschüssen“ des Reaktionsverlaufs des Systems Au+Au bei 400 MeV/u unter Verwendung der Parametrisierung NL1 beginnen. In Abbildung 3.3 zeigen wir die Nukleondichte in Kontur-Linien von 0.01, 0.1, 0.2, 0.3 und 0.4 fm^{-3} ; weiterhin ist die mittels der Diagonalisierung des Energie-Impuls-Tensors (3.2) gewonnene Flußgeschwindigkeit der einzelnen Zellen durch die Pfeile angedeutet. Die Reaktion startet bei $t = 6$ fm/c; zu diesem Zeitpunkt berühren sich die beiden Kerne zum ersten Mal. Zum Zeitpunkt $t = 15$ fm/c hat sich eine Hochdichtezone im Überlapp-Bereich gebildet. Die Geschwindigkeiten der einlaufenden Nukleonen-Ströme mitteln sich hier zu Null.

Für die Strahlenergie $T = 1$ GeV/u beträgt die Nukleonengeschwindigkeit $v \approx 0.86$ c (ohne Berücksichtigung der Fermi-Bewegung), weit mehr als die Schallgeschwindigkeit in Kernmaterie, die durch

$$c_s = \sqrt{\frac{K}{9m}} \approx 0.2c \quad \text{für } K = 300 \text{ MeV} \quad (3.6)$$

bestimmt ist. Deshalb kann die komprimierte Materie nicht schnell genug in die transversale Richtung ausweichen. Dies führt zu einem stetigen Ansteigen der Dichte. Zum Zeitpunkt $t = 21$ fm/c sind die ersten Abweichungen von

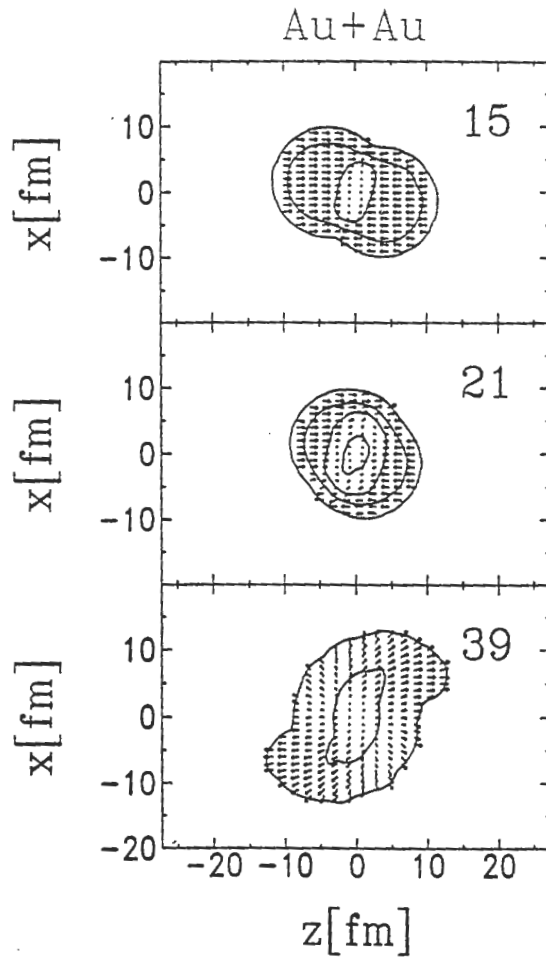


Abbildung 3.3: Die Baryonen-Dichte in der Reaktionsebene in Konturlinien von 0.01, 0.1, 0.2, 0.3 und 0.4 fm^{-3} ; die hydrodynamischen Fluß-Geschwindigkeiten sind durch die Pfeile gekennzeichnet. Die Zahlen in den einzelnen Bildern geben die Zeit in fm/c an.

der ursprünglich rein longitudinalen — d.h. in Strahlrichtung — Bewegung der Nukleonenströme festzustellen. Dieser Effekt kommt einerseits durch die Lorentz-Kraft zustande (vergl. (2.5)), wird aber andererseits auch durch die hohe Dichte im Zentrum verursacht. Zum Zeitpunkt $t = 39 \text{ fm}/c$ ist die Reaktion im wesentlichen beendet. Wir können das Reaktionsvolumen in drei Bereiche unterteilen: Zunächst eine „Beobachter“-Zone mit Teilchen, die an der Reaktion nicht teilgenommen haben. Diese bewegen sich, nur schwach durch die Wirkung des mittleren Feldes abgelenkt, in der ursprünglichen Bewegungsrichtung weiter. Zum zweiten gibt es die hochkomprimierte Materie im Zentrum des „Feuerballs“, die sich isotrop ausdehnt. Weiterhin können wir in den Randbereichen Teilchen beobachten, die sich mit fast dem ursprünglichen Betrag der Strahlgeschwindigkeit bewegen, jedoch sehr stark (ca. 45°) abgelenkt wurden. Diese Gebiete erzeugen den experimentell beobachteten transversalen Fluß [6, 7].

Nun wollen wir uns den lokalen thermodynamischen Eigenschaften eines einzelnen Volumenelements im Zentrum der Reaktionszone zuwenden. Wir betrachten dazu einen Kubus der Größe $\approx 23 \text{ fm}^3$. Dieses Volumen ist klein im Vergleich zum Gesamtvolumen eines Au-Kerns ($\approx 1440 \text{ fm}^3$) und damit geeignet, Aussagen über lokale Größen zu liefern. Auf der anderen Seite ist es groß genug, um die statistischen Fehler klein zu halten.

In Abbildungen 3.4 – 3.6 zeigen wir die Zeitentwicklung der wichtigsten thermodynamischen Größen des Systems. Um transversale und longitudinale Freiheitsgrade korrekt unterscheiden zu können, wurde der Energie-Impulstensor nur in sein Ruhesystem geboostet und nicht vollständig diagonalisiert; d.h. nur die Elemente T^{ii} verschwinden, der Drucktensor ist nicht diagonal. Für den zentralen Überlappbereich deckt sich das Kern-Kern CM-System natürlich im wesentlichen mit dem lokalen Ruhesystem. Da das gewählte Volumenelement größer als eine Gitterzelle ist (s.o.), ergeben sich nur für etwas außerhalb der Mitte gelegene Zellen kleine Korrekturen.

Als typisches Beispiel haben wir die Reaktion $\text{Au} + \text{Au}$ bei $600 \text{ MeV}/u$ unter Verwendung der Parametrisierungen NL1–NL3 ausgewählt. Im oberen Teil der Abbildungen zeigen wir zum besseren Verständnis der an der Abszisse angegebenen Zeiten die Dichteprofile (vergl. 3.3). Der erste Rahmen zeigt die Dichte, normiert auf die Sättigungsdichte (diese ist für alle drei Parametrisierungen NL1, NL2 und NL3 identisch) und die transversale und longitudinale Temperatur. Diese wurde entsprechend der Diskussion im letzten Abschnitt gewonnen. Wir möchten hier nochmals anmerken, daß der Begriff „Temperatur“ hier und im folgenden verwendet werden soll, ohne thermisches Gleichgewicht vorauszusetzen. Die Fehlerbalken für die Temperaturen wurden wie in Abschnitt 3.2 diskutiert berechnet. Während die Dichte $\rho(t)$ für NL1 und NL2 im wesentlichen identisch ist, ist das Maximum für NL3 (mit der starken Impulsabhängigkeit) um ca. 20% niedriger und fällt außerdem auch schneller ab. Ein ähnliches Ergebnis erhält man

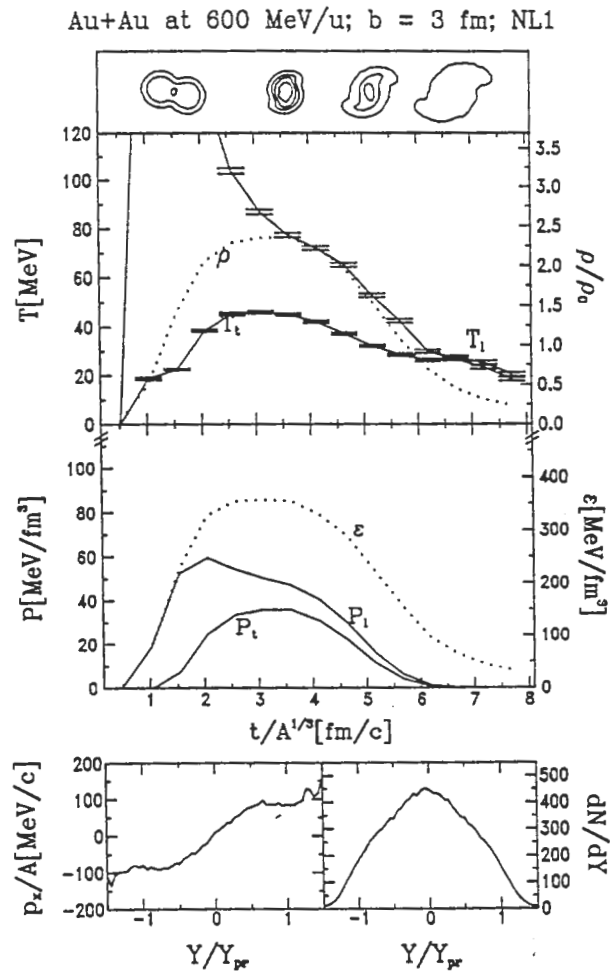


Abbildung 3.4: Lokale thermodynamische Größen für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; Die verwendete Parametrisierung ist NL1.

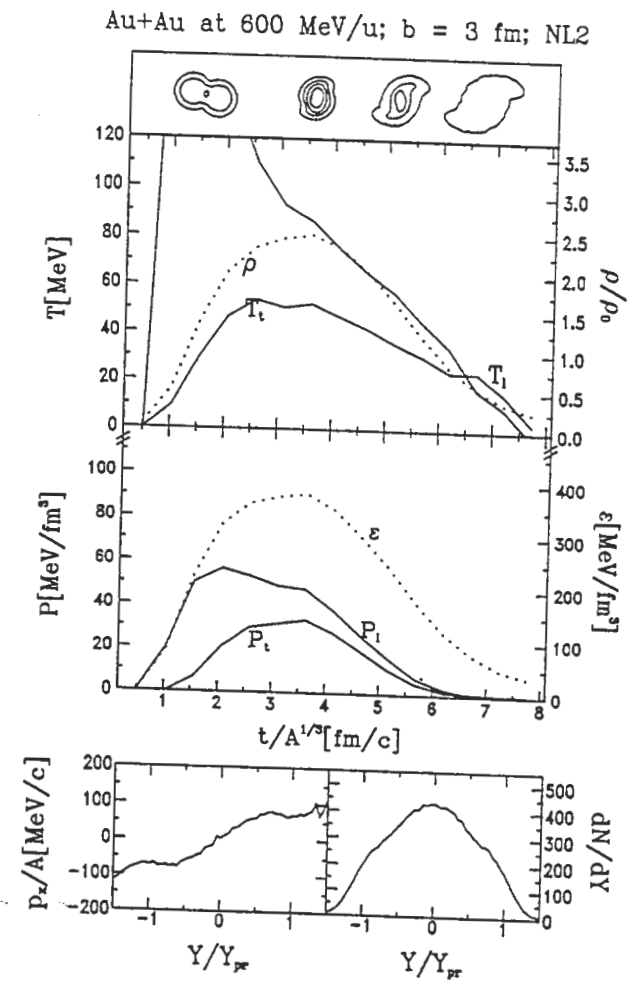


Abbildung 3.5: Lokale thermodynamische Größen für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; Die verwendete Parametrisierung ist NL2.

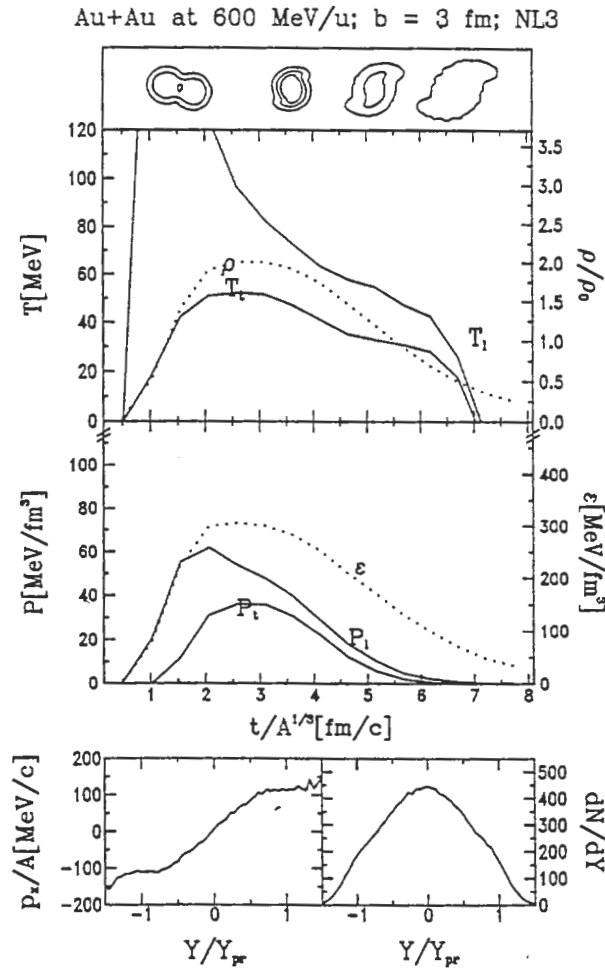


Abbildung 3.6: Lokale thermodynamische Größen für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; Die verwendete Parametrisierung ist NL3.

für die Energiedichte $\epsilon(t)$ (zweiter Rahmen), die annähernd mit $\rho(t)$ skaliert. Die longitudinalen und transversalen Komponenten $P_l(t)$ und $P_t(t)$ sind für alle Parametrisierungen bis fast zum Ende der Expansionsphase deutlich verschieden. Hier bezeichne „transversal“ die transversale Richtung in der Reaktionsebene. Überraschenderweise zeigt es sich, daß die Maxima sowohl des transversalen wie des longitudinalen Drucks innerhalb von ca. 5% für alle Parametrisierungen identisch sind. Der lokale Druck ist demnach nicht sensitiv auf die Zustandsgleichung.

Wir wenden uns nun der Diskussion der Temperaturen, die mit Hilfe der lokalen Druckkomponenten P_l und P_t und der lokalen Dichte ρ entsprechend Abschnitt 3.2 für die verschiedenen Parametrisierung gewonnen wurden, zu. Selbstverständlich hat die zu Beginn der Reaktion beobachtete hohe longitudinale Temperatur keinerlei physikalische Signifikanz, da sie von dem hohen longitudinalen Druck verursacht wird. Dieser ist einfach durch die anfängliche Separation der beiden Fermi-Kugeln und damit direkt durch die Strahlenergie gegeben. Die transversale Temperatur hingegen wird erst im Laufe der Reaktion erzeugt und ist somit eine aussagekräftigere Größe. Dies wird auch durch unsere Feststellung unterstützt, daß im Bereich der statistischen Fehlerbalken $P_x \approx P_y$ ist. Die transversale Temperatur T_t erreicht ein Plateau von ca. 45–50 MeV und bleibt während der Kompressionsphase nahezu konstant.

Am Ende der Reaktion nähern sich transversale und longitudinale Temperatur, wie man dies auch für ein System erwarten würde, das sich dem thermodynamischen Gleichgewicht nähert. Es sei allerdings angemerkt, daß die Dichte zu diesem Zeitpunkt bereits stark abgefallen ist. Es mag deshalb durchaus sein, daß die festgestellte Äquilibration lediglich ein trivialer Effekt aufgrund der rapiden Expansion des System ist. Für leichtere Systeme ist diese Situation noch ausgeprägter.

Da vorgeschlagen wurde, aus dem kollektiven Fluß der Kernmaterie Informationen über die während der Reaktion erreichten Drücke zu ziehen, zeigen wir im unteren linken Teil der Abbildungen die $\langle p_x/A \rangle$ -Verteilungen als Funktion der normierten Rapidität. Die experimentell beobachtete typische S-Form der Kurven ist klar zu erkennen. Im Vergleich der $\langle p_x/A \rangle$ -Verteilungen in Abbildungen 3.4–3.6 finden wir, daß der mittlere transversale Impuls pro Teilchen als Funktion der Rapidität Y für NL1 und NL2 ungefähr gleich ist, während die Werte an der Stelle der Projektilrapidität für die Parametrisierung NL3, mit ihrer stärkeren Impulsabhängigkeit, höher sind. Wir werden die Diskussion dieser Observable später noch einmal aufnehmen.

Der untere rechte Teil der Abbildungen zeigt die Zahl der Nukleonen pro Rapiditäts-Intervall dN/dY . Der Verlauf der Kurven zeigt ein starkes Abstoppen der Nukleonen im CM-System an. Trotzdem kann man aus der Form dieser Kurven nicht auf Äquilibration schließen, da über die transversalen Impulskomponenten integriert wurde. Diese Information über die

Au + Au at 600 MeV/u; $b = 3$ fm; NL1

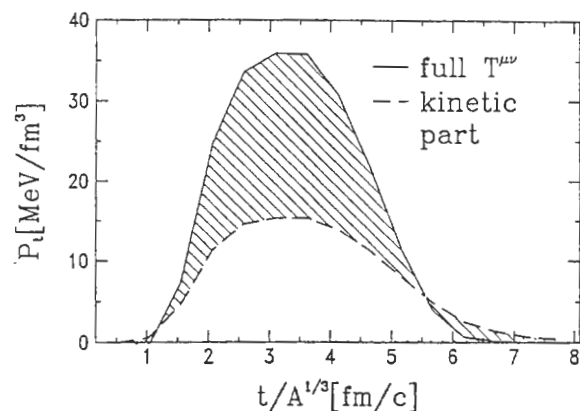


Abbildung 3.7: Transversaler Druck P_t für die Reaktion Au+Au bei 600 MeV/u; Die verwendete Parametrisierung ist NL1. Durchgezogen: Rechnung entsprechend (3.2); Gestrichelt: „Kinetischer“ Beitrag (vergl. Text).

transversale Impulsverteilung wird benötigt, um Aussagen über totales Abstoppen oder Äquilibration zu erhalten. Wir möchten noch anmerken, daß die dN/dY -Verteilungen für alle drei Parametrisierungen NL1–NL3 dieselbe Form haben.

Für die Bestimmung der longitudinalen und transversalen Druckkomponenten P_l und P_t hatten wir den Energie-Impuls-Tensor lediglich in sein Ruhesystem transformiert. Die Nicht-Diagonalelemente verschwinden demnach nicht notwendigerweise. In einem Koordinatensystem, in dem z die Strahlachse bezeichnet und die Reaktionsebene durch die $x-z$ -Ebene beschrieben wird, zeigt es sich, daß die Elemente T_{yz} und T_{zy} im wesentlichen Null sind, während das Element T_{xx} deutlich von Null verschieden ist. Dies weist auf starke Fluß-Effekte ausserhalb des Gleichgewichts hin.

Zum Schluß soll auf die Wichtigkeit der korrekten Einbeziehung baryonischer und mesonischer Freiheitsgrade für die Berechnung thermodynamischer Größen hingewiesen werden. Da wir unsere Diskussion auf einer Lagrange-Dichte aufgebaut hatten, sind die mesonischen Freiheitsgrade in unseren Rechnungen natürlich enthalten. In Abbildung 3.7 vergleichen wir den transversalen Druck P_t , den wir entsprechen Gleichung (3.2) für dieselbe Reaktion wie in Abbildung 3.4 berechnet haben, mit einem reinen „kinetischen“ P_t^{kinetic} , den wir mittels

$$T_{\text{kinetic}}^{\mu\nu} := \frac{4}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu p^\nu f(x, p) \quad (3.7)$$

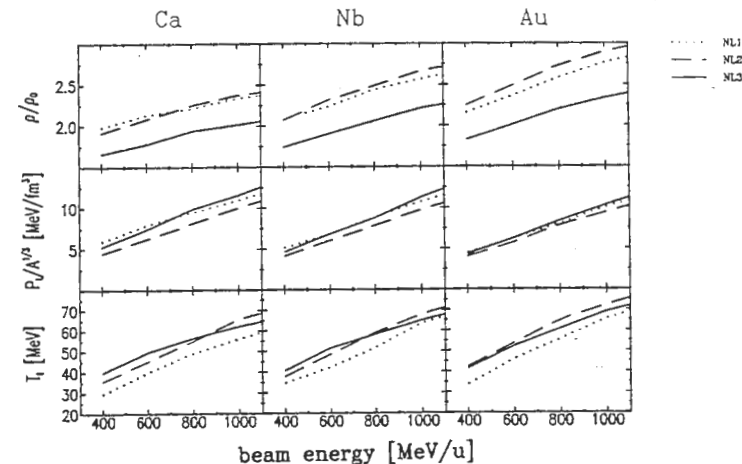


Abbildung 3.8: Maxima von Dichte, transversalem Druck und transversaler Temperatur als Funktion der Einschussenergie für Ca + Ca, Nb + Nb und Au + Au.

definieren. Der große Unterschied zwischen beiden Kurven ist offensichtlich. Es ist weiterhin nicht möglich, die Unterschiede durch eine einfache Skalierung auszugleichen, da sich das Verhältnis P_t/P_t^{kinetic} zwischen 0 bis 2.5 während der Reaktion bewegt. Wir folgern daraus, daß ein rein „kinetischer“ Energie-Impuls-Tensor und alle daraus abgeleiteten Größen (wie z.B. „kinetische“ Temperaturen) keine Informationen über die Dynamik von Schwerionen-Reaktionen ausserhalb des Gleichgewichts liefern können.

3.4 Energie- und Massenabhängigkeit

Wir wenden uns nun einer systematischen Analyse der verschiedenen Größen wie Dichte, Druck, Temperatur, Fluß etc. als Funktion der Einschussenergie und Masse für unterschiedliche Zustandsgleichungen zu. In Abbildung 3.8 zeigen wir die Abhängigkeit der Maxima der Dichte, des transversalen Drucks und der Temperatur von der Strahlenergie für Ca + Ca, Nb + Nb und Au + Au. Zunächst sei das obere Bild besprochen, in dem wir das Maximum der Dichte zeigen. Das auffälligste Merkmal dieser Kurven ist der starke Einfluß der impulsabhängigen Kräfte, die in NL3 am stärksten sind, auf ρ_{max} , während die Kompressibilität nur eine geringe Bedeutung hat. Die erreichte maximale Dichte steigt selbstverständlich an, wenn man die Strahlenergie erhöht. Weiterhin hängt ρ_{max} von der Kernmasse ab. Der Unterschied zwischen NL1 und NL3 in der maximalen Dichte ist für die schwersten Systeme

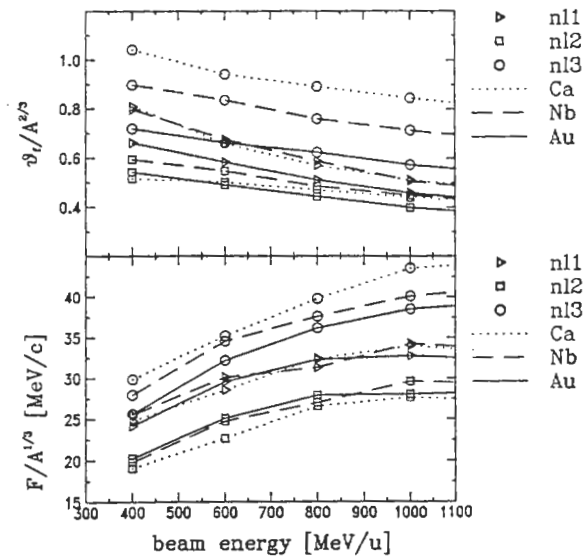


Abbildung 3.9: Flußwinkel und transversaler Fluß als Funktion der Einschüßenergie für Ca + Ca, Nb + Nb und Au + Au.

am deutlichsten.

Der transversale Druck zeigt keine solch starke Abhängigkeit von der effektiven Masse. Er ist eine lineare Funktion der Strahlenergie und skaliert ungefähr mit $A^{1/3}$. Dies könnte eine lineare Abhängigkeit des transversalen Drucks von der Reaktionszeit widerspiegeln. Wie man aus Abbildungen 3.4 – 3.6 ersehen kann, steigt der transversale Druck P_t tatsächlich fast linear mit der Zeit an. Die transversale Temperatur, die eine Funktion von Dichte und Druck ist, weist Charakteristiken beider oberer Kurven auf, jedoch nicht so ausgeprägt. Für das schwerste System Au + Au bei 1 GeV/u Einschüßenergie erreicht man eine maximale transversale Temperatur von ca. 60 – 70 MeV. Auch die transversale Temperatur steigt mit wachsender System-Masse für feste Strahlenergie an.

Die bisher besprochenen Größen sind sehr wichtige thermodynamische Parameter, und man würde sie gern mit experimentellen Observablen in Verbindung setzen. Wir haben deshalb den Flußwinkel und den transversalen Fluß, die auch experimentell bestimmt wurden [6, 7], berechnet. In Abbildung 3.9 haben wir die experimentell beobachtete Skalierung des transversalen Flusses mit $A^{1/3}$ verwandt. Wie man erkennen kann, ist dieses Skalierungsverhalten für die Parametrisierungen NL1 und NL2 sehr gut für alle Energien erfüllt, während für NL3 (mit der starken Impulsabhängigkeit) die Skalierung nicht sonderlich gut ist. Demnach ist die Güte der Skalierung abhängig von m^* , d.h. von der Stärke der impulsabhängigen Kräfte.

Die Skalierung des Flusswinkels mit der Masse wurde leider bislang noch

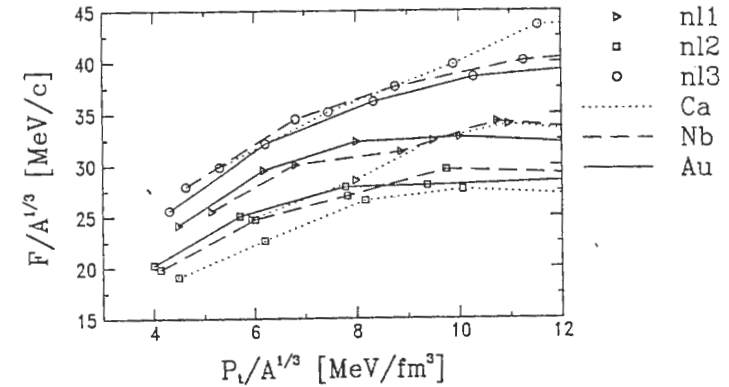


Abbildung 3.10: Transversaler Fluß als Funktion des transversalen Drucks P_t .

nicht untersucht. Wir erhalten aus unseren Rechnungen einen Exponenten von $\approx 2/3$ für die Parametrisierungen NL1 und NL2. Auch hier ist diese Skalierung für den Parametersatz NL3 nicht erfüllt. Die Abweichung ist, verglichen mit der für den transversalen Fluß festgestellten, sogar größer.

Es scheint nun naheliegend, den beobachteten transversalen Fluß mit dem Maximum der transversalen Drucks, der in der Reaktion erreicht wurde, zu korrelieren. Wie man aus Abbildung 3.10 ersieht, fallen alle Datenpunkte, die unter Verwendung derselben Parametrisierung erhalten wurden, tatsächlich im Wesentlichen auf eine Kurve. Es ist aber ein deutlicher Unterschied zwischen den Rechnungen mit unterschiedlichen Parametrisierungen, d.h. mit unterschiedlichen Zustandsgleichungen, festzustellen. Es erscheint weiterhin unmöglich, Informationen über den maximalen Druck, der im Laufe der Reaktion erreicht wurde, aus den gemessenen Fluß-Werten zu erhalten, da, besonders für die höheren Drücke, der Fluß nur schwach von P_t abhängt.

Die Entropie, die in einer Schwerionenkollision erzeugt wurde, kann man mit der Häufigkeit des Auftretens der gebundenen Teilchen in Verbindung setzen [9]. Wir haben die Entropie pro Nukleon für alle oben besprochenen Systeme über die gesamte Reaktionszeit berechnet. Hierbei sei angemerkt, daß wir die Integration über den gesamten Phasenraum auch tatsächlich durchgeführt haben (vergl. (3.5)). Es wurden keinerlei Annahmen über Symmetrien in den Verteilungen und auch keinerlei Approximationen durch die Beschränkung auf Teilvolumina gemacht.

In Abbildung 3.11 zeigen wir die Zeitentwicklung der Entropie pro Nu-

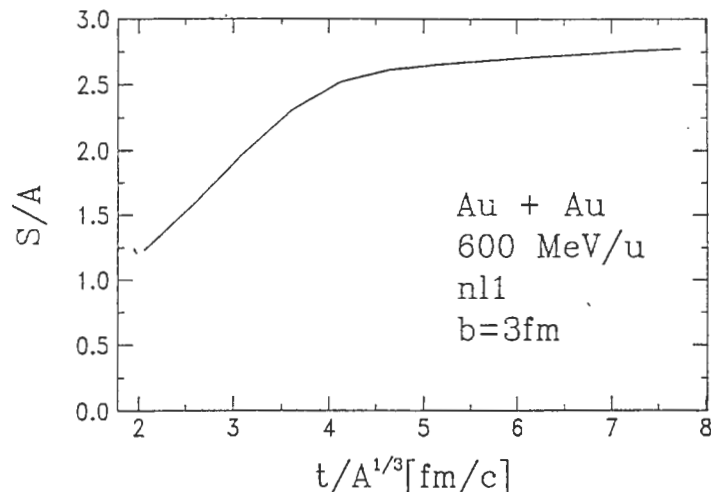


Abbildung 3.11: Entropie pro Nukleon als Funktion der Zeit für die Reaktion Au + Au bei 800 MeV/u; Die verwendete Parametrisierung ist NL1.

kleon S/A für die Reaktion Au + Au bei 800 MeV/u für die Parametrisierung NL1. Man erkennt einen starken Anstieg der Entropie pro Nukleon am Anfang der Reaktion, während sie in der Endphase annähernd konstant bleibt. Dies erlaubt eine eindeutige Bestimmung von S/A . In Abbildung 3.12 zeigen wir diese Grenzwerte der Entropie pro Nukleon als Funktion der Strahlenergie. Wir bemerken erneut einen starken Einfluß der Impulsabhängigkeit für hohe Strahlenergien; dieser wird jedoch für niedrigere Strahlenergien zu demjenigen der Kompressibilität vergleichbar. Es ist ebenso eine Abhängigkeit von der Systemmasse festzustellen. Dies wird durch die experimentellen Ergebnisse [6, 51] unterstützt. Die Daten der Plastik-Ball-Gruppe deuten auf Entropien leicht oberhalb drei hin. Man kann diese Zahlen jedoch nicht direkt mit unseren Rechnungen vergleichen; dies liegt unter anderem daran, daß auch nach der eigentlichen Kollision im Experiment Entropie durch den Zerfall instabiler Fragmente erzeugt wird.

3.5 Vergleich mit experimentellen Daten

Der mittlere Transversalimpuls pro Teilchen p_x/A ist als Funktion der longitudinalen Rapidität y sehr sensitiv auf den verwendeten Wert von m^* [52, 53, 34, 54] und approximativ durch die experimentellen Daten bestimmt. Während für Strahlenergien bis 400 MeV/u kein entscheidender Unterschied zwischen den Parametersätzen NL1, NL2 und NL3 gefunden werden kann

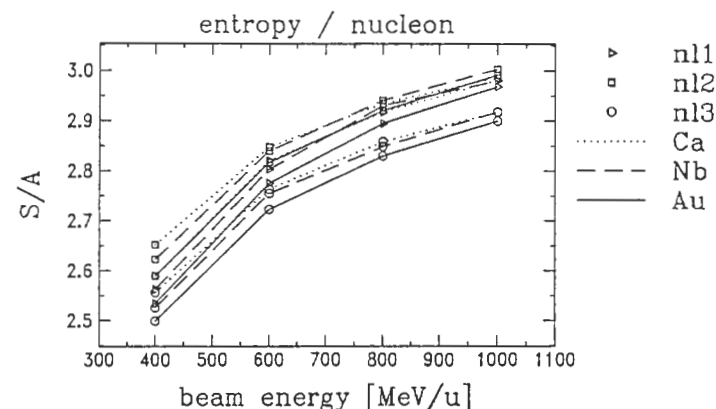


Abbildung 3.12: Entropie pro Nukleon als Funktion der Strahlenergie für Ca + Ca, Nb + Nb und Au + Au.

[37] (dies hängt zum Teil mit den Beschränkungen des Plastic-Ball-Detektors zusammen), scheinen die Streamer Chamber Daten [55] für $^{40}\text{Ar} + \text{KCl}$ und $^{139}\text{La} + ^{139}\text{La}$ bei 800 MeV/u für p_x/A gegen die Rapidität y solch starken impulsabhängigen Kräfte, wie sie in der Parametrisierung NL3 auftreten, auszuschließen, während man sowohl mit NL1 als auch mit NL2, mit derselben effektiven Masse, jedoch unterschiedlicher Kompressibilität K , die Daten zufriedenstellend reproduzieren kann [34] (vergl. Abbildung 3.13). Dieses Resultat ist nicht unerwartet, da die Parametersätze NL1 und NL2 das Proton-Kern optische Potential bei 1 GeV/u reproduzieren [56, 57], während es von NL3 wesentlich überschätzt wird [34, 54]. Wir wollen deshalb im folgenden den Ansatz machen, daß die impulsabhängigen Kräfte für 1 GeV/u ungefähr bekannt sind und lediglich die Kompressibilität K im Vergleich mit dem Experiment bestimmt werden muß.

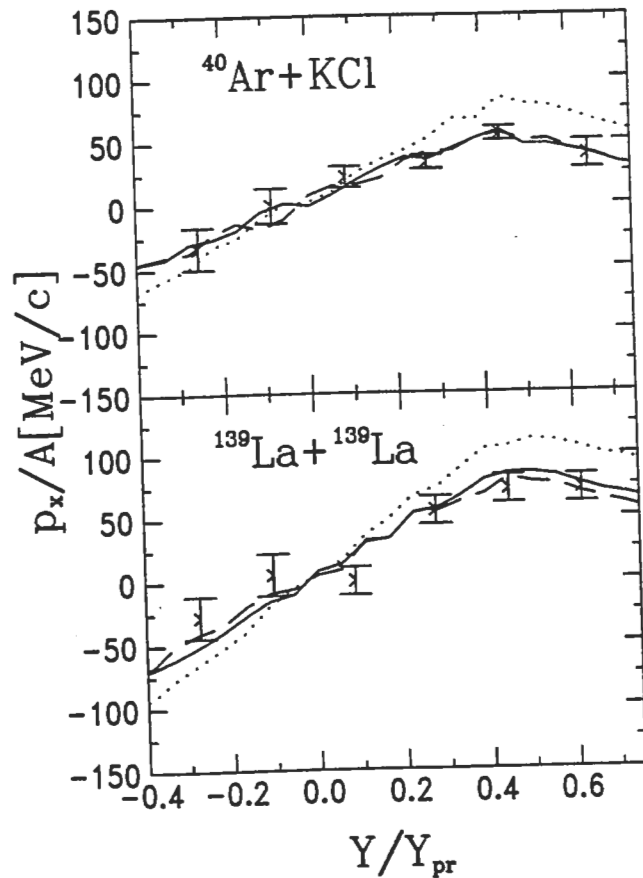


Abbildung 3.13: Mittlerer Transversalimpuls pro Nukleon $\langle p_x/A \rangle$ als Funktion der CM-Rapidity y für die Reaktionen Ar + KCl und La + La bei 800 MeV/u. Durchgezogene Linie: NL1; Gestrichelte Linie: NL2; Gepunktete Linie: NL3.

Kapitel 4

Teilchenproduktion

4.1 Modellbeschreibung

4.1.1 Perturbative Behandlung der K^+ Produktion

Da die Kaonen-Multiplizität im Energiebereich unterhalb der Schwelle sehr gering ist, verwenden wir einen perturbativen Ansatz [58], in dem wir die Produktionswahrscheinlichkeiten für jede Baryon-Baryon-Kollision inkohärent aufsummieren:

$$E \frac{d^3 N(b)}{d^3 k} = \sum_{BB \text{ coll}} \int \frac{d\Omega}{4\pi} E' \frac{d^2 P(\sqrt{s})}{d^3 k'} (1 - f(r, \Pi_3; t)). \quad (4.1)$$

In dieser Gleichung bezeichnen r und t die Raum-Zeit-Koordinate und \sqrt{s} die invariante Energie in der Baryon-Baryon-Kollision, $s = (\Pi_1^0 + \Pi_2^0)^2 - (\Pi_1 + \Pi_2)^2$, wobei die Quasiteilchen-Massenschale $\Pi_0^2 = \Pi^2 + m^{*2}$ verwendet wurde. Die Striche bezeichnen Größen, die im individuellen Baryon-Baryon CM-System definiert sind und in das Labor- oder „Mid-Rapidity“-System transformiert werden müssen. Π_3 bezeichnet den Impuls des Nukleons im Endzustand der Reaktion $BB \rightarrow K^+ YN$, wobei $Y \equiv (\Lambda, \Sigma)$, $B \equiv (N, \Delta)$. Ω ist der Raumwinkel des Relativimpulses $\Pi_3 - \Pi_Y$. Dieser Winkel ist nicht durch Energie- oder Impuls-Erhaltung bestimmt und muß ausintegriert werden. Der Faktor $(1 - f(r, \Pi_3; t))$ berücksichtigt das Pauli-Blocking des Endzustand-Nukleons. Der entsprechende Faktor für das Hyperon Y wurde vernachlässigt. Der Parameter b bezeichnet den Stoßparameter der Schwerionenkollision. Um einen inklusiven Wirkungsquerschnitt zu erhalten, muß noch über b integriert werden:

$$E \frac{d^3 \sigma}{d^3 k} = \int db^2 E \frac{d^3 N(b)}{d^3 k}. \quad (4.2)$$

Es sei angemerkt, daß Gleichung (4.1) die primordiale differentielle K^+ Multiplizität bezeichnet, die wegen der Endzustandswechselwirkung des Kaons

mit den Baryonen (vergl. Ko et al. [59, 17]) nicht direkt mit experimentellen Spektren verglichen werden sollte. Energie-integrierte K^+ Ausbeuten an denen wir hauptsächlich interessiert sind, sind jedoch insensitive auf K^+ Rückstreuung, so daß wir die mögliche Endzustandswechselwirkung in dieser Arbeit gänzlich vernachlässigen.

Die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit $d^3P(\sqrt{s})/d^3k'$ ist durch

$$E \frac{d^3P(\sqrt{s})}{d^3k} = E \frac{d^3\sigma_K(\sqrt{s})}{d^3k} / \sigma_{BB}(\sqrt{s}) \quad (4.3)$$

bestimmt. Hierin bezeichnet $d^3\sigma_K(\sqrt{s})/d^3k$ den elementaren differentiellen K^+ Produktions-Wirkungsquerschnitt und $\sigma_{BB}(\sqrt{s})$ den totalen Baryon-Baryon Wirkungsquerschnitt in einer Baryon-Baryon Kollision.

4.1.2 Die Parametrisierung des elementaren Prozesses $BB \rightarrow K^+YN$

Abgesehen von der zeitabhängigen Phasenraumverteilungsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{\Pi}; t)$ — die man mittels experimenteller Baryonenspektren und Rapiditätsverteilungen kontrollieren kann [37] — ist die differentielle K^+ Multiplizität vollständig durch den elementaren Wirkungsquerschnitt $d^3\sigma_K(\sqrt{s})/d^3k$ in (4.3), der selbst für pp Reaktionen nahe der Schwelle nicht gut bekannt ist, bestimmt. Während man die NN induzierten Kanäle approximativ in einem effektiven Bosonen-Austauschmodell beschreiben kann [60], ist dies für ΔN oder $\Delta\Delta$ Kanäle nicht klar, da hierfür keine experimentellen Daten vorliegen. Unser Ziel ist deshalb eine Parametrisierung der experimentellen Daten in einem Phasenraum-bezogenen Modell, das vollständig durch die Masse der beteiligten Teilchen bestimmt ist und demnach eine konsistente Extrapolation auf Quasiteilchen und Nukleonresonanzen erlaubt.

Analog Zwermann [22] schreiben wir den totalen K^+ Produktions-Wirkungsquerschnitt als

$$\sigma_K(\sqrt{s}) = 0.8 \frac{(p_{\max}(\sqrt{s}))^4}{(\text{GeV}/c)^4} \quad [\text{mb}] \quad (4.4)$$

mit

$$p_{\max}^2 = (s - (m_N + m_Y + m_K)^2)(s - (m_N + m_Y - m_K)^2)/(4s) \quad (4.5)$$

wobei m_N , m_Y und m_K die Massen des Endzustands-Baryons, Hyperons bzw. Kaons bezeichnet. Da die Parametrisierung (4.4) sowohl den Prozess $BB \rightarrow K^+\Delta N$ als auch $BB \rightarrow K^+\Sigma N$ enthält, setzen wir

$$m_Y = \begin{cases} m_\Lambda & \text{für } \sqrt{s} < \sqrt{s_\Sigma^0} \\ m_\Lambda - \frac{m_\Lambda - m_\Sigma}{\sqrt{s_c} - \sqrt{s_\Sigma^0}} (\sqrt{s} - \sqrt{s_\Sigma^0}) & \text{für } \sqrt{s_\Sigma^0} < \sqrt{s} < \sqrt{s_c} \\ m_\Sigma & \text{für } \sqrt{s} > \sqrt{s_c} \end{cases} \quad (4.6)$$

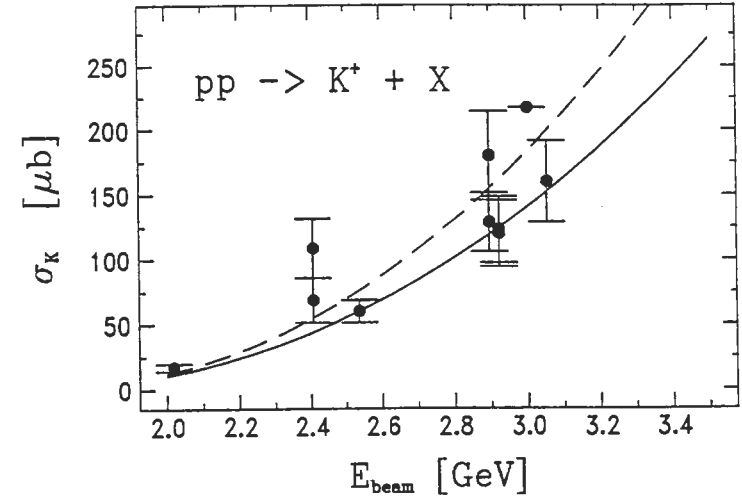


Abbildung 4.1: Parametrisierung des totalen K^+ Wirkungsquerschnitts: durchgezogene Linie: diese Arbeit; gestrichelte Linie: Zwermann [22]; Kreise: experimentelle Daten.

mit $\sqrt{s_\Sigma^0} = m_B + m_\Sigma + m_K = 2.642 \text{ GeV}$ und $\sqrt{s_c} = 3.2 \text{ GeV}$. Dies verbessert die Phasenraumbeschreibung für höhere Energien, da der Σ -Kanal oberhalb seiner Schwelle dominiert. In Abbildung 4.1 zeigen wir die Parametrisierung (4.4) (durchgezogene Linie) im Vergleich mit den experimentellen Daten und dem ursprünglichen Modell von Zwermann [22] (gestrichelte Linie). Wie man sieht, gibt es keine experimentelle Information oberhalb der Schwelle ($E_{\text{beam}} \approx 1.56 \text{ GeV}$ bis 2 GeV); andere Parametrisierungen innerhalb von 30% würden ebenfalls annehmbare Anpassungen an die Daten erlauben.

Für den differentiellen K^+ Wirkungsquerschnitt setzen wir, wie in [15, 18] vorgeschlagen

$$E \frac{d^3\sigma(\sqrt{s})}{d^3k} = \sigma_K(\sqrt{s}) E \frac{3}{\pi k^2} \frac{1}{p_{\max}} \left(1 - \frac{k}{p_{\max}}\right) \left(\frac{k}{p_{\max}}\right)^2 \quad (4.7)$$

an, mit $\sigma_K(\sqrt{s})$ aus Gleichung (4.4). In Abbildung 4.2 vergleichen wir diese Approximation mit den experimentellen Daten bei 2.54 GeV und 2.88 GeV und finden eine Übereinstimmung innerhalb von 30%.

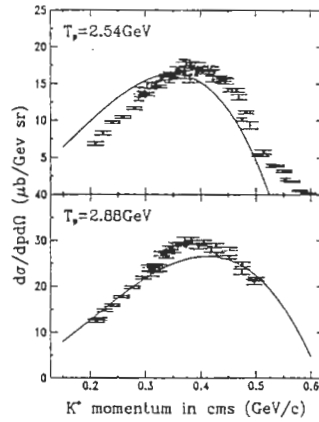


Abbildung 4.2: Parametrisierung des differentiellen K^+ Wirkungsquerschnitts: durchgezogene Linie: diese Arbeit; Kreise: experimentelle Daten.

Da es keine Daten für $N\Delta$ und $\Delta\Delta$ induzierte Kanäle gibt, nehmen wir an, daß diese durch den entsprechenden NN Wirkungsquerschnitt bei derselben invarianten Energie, unter Berücksichtigung der relativen Isospingewichtung, gegeben sind [15, 22], d.h.

$$\frac{4}{3}\sigma_{N\Delta \rightarrow K^+ + X}(\sqrt{s}) \approx 2\sigma_{\Delta\Delta \rightarrow K^+ + X}(\sqrt{s}) \approx \sigma_{NN \rightarrow K^+ + X}(\sqrt{s}). \quad (4.8)$$

Der Ansatz (4.8) ist auf der Annahme begründet, daß lediglich die verfügbare Energie — und damit der Endzustandsphasenraum — die K^+ Produktion bestimmt; dies ist nicht so unvernünftig, da die Kaonen nicht hauptsächlich durch den Zerfall einer bestimmten Resonanz produziert werden [61, 62], wie das beispielsweise für π - oder η -Mesonen der Fall ist. In der weiteren Diskussion sollte man jedoch die bedeutende Unsicherheit in dem elementaren Produktionsquerschnitt berücksichtigen, und die Ergebnisse für die K^+ Produktion in leichten und schweren Systemen bei derselben Strahlenergie miteinander vergleichen, um so möglicherweise die Effekte einer schlechten Parametrisierung auszugleichen [63].

Um dies zu verdeutlichen zeigen wir in Abbildung 4.3 das Verhältnis der differentiellen K^+ Ausbeute für die Systeme $Ne + Ne$ zu $Au + Au$ bei 1 GeV/u und einem Laborwinkel von 41° einmal unter Verwendung der Parametrisierungen (4.4) – (4.7) und dann mit einer Skalierung des Kanals $N\Delta \rightarrow$ mit einem Faktor zwei. Es sei angemerkt, daß dieser Kanal der dominante Produktionsmechanismus für K^+ bei dieser Strahlenergie ist (s.u.). Wir fin-

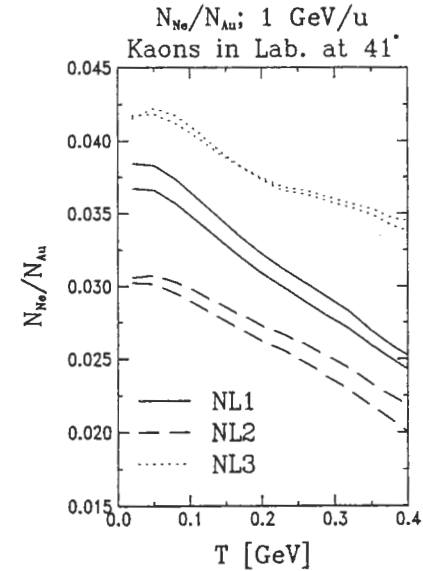


Abbildung 4.3: Verhältnis der differentiellen K^+ Ausbeute N_K^{Au}/N_K^{Ne} für die Reaktionen $Au + Au$ und $Ne + Ne$, 41° im Lab. bei 1 GeV/u. Durchgezogene Kurve: Parametrisierung (4.4) – (4.7); Gestrichelte Kurve: $N\Delta$ -Kanal mit zwei skaliert.

den, daß sich das Verhältnis der K^+ Produktion für Ne/Au um weniger als 3% für die Parametersätze NL1, NL2 und NL3 ändert.

Ein weiteres Problem tritt im Zusammenhang mit möglichen in-medium Korrekturen der elementaren Reaktionen $BB \rightarrow K^+YN$ für das Übergangsmatrixelement auf (neben den trivialen Korrekturen durch Verwendung von Quasi-Teilchen Massen m^* und Impulsen Π_μ). Hierfür wurde von Wu und Ko [64] gezeigt, daß die zu erwartenden Änderungen sehr moderat sind und wesentlich unterhalb den, in den Parametrisierungen (4.4) und (4.7) beinhalteten, Unsicherheiten bleiben. Wir verwenden deshalb im folgenden die Parametrisierungen (4.4) – (4.7) und untersuchen explizit die Abhängigkeit der K^+ Produktion von der Masse für feste Strahlenergie und verschiedene Zustandsgleichungen. Die Frage der in-medium Korrekturen werden wir allerdings in Abschnitt 4.2.4 wieder aufgreifen.

4.2 K^+ Wirkungsquerschnitte in Schwerionenkollisionen

4.2.1 Analyse von zentralen Kollisionen

Im Hinblick auf die ersten K^+ Messungen der KAOS Gruppe am SIS beschränken wir uns auf eine Strahlenergie von 1 GeV/u und berechnen die differentielle K^+ Erzeugung unter einem Laborwinkel von 41° . Die Ergebnisse unserer Rechnungen für Ne + Ne und Au + Au bei einem Stoßparameter von $b = 0$ fm zeigen wir in Abbildungen 4.4 und 4.5 als Funktion der kinetischen Energie des Kaons T_{K^+} für die drei verschiedenen Parametrisierungen NL1, NL2 und NL3 der Lagrangedichte. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß NL1 und NL3 dieselbe Kompressibilität von $K = 380$ MeV besitzen, sich jedoch in dem Wert ihrer effektiven Masse bei $\rho = \rho_0 = 0.145$ fm $^{-3}$ ($m^*/m = 0.83$ für NL1; $m^*/m = 0.7$ für NL3) unterscheiden; NL1 und NL2 hingegen haben dieselbe effektive Masse (und damit auch dieselbe Stärke der impulsabhängigen Kräfte), aber unterschiedliche Kompressibilitäten ($K = 210$ MeV für NL2).

Für das leichtere System Ne + Ne finden wir, daß die K^+ Produktion hauptsächlich auf die impulsabhängigen Kräfte und kaum auf K (im Vergleich NL1 und NL2) sensitiv ist. Die entsprechenden Kurven für das schwere System Au + Au (Abb. 4.5) zeigen eine starke Abhängigkeit von K (NL1 gegen NL2), die größer als die von der effektiven Masse m^* (NL1 gegen NL3) ist. Die totale Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für NL2 gegen NL3 beträgt ca. einen Faktor zwei, in Übereinstimmung mit früheren nicht-relativistischen Rechnungen [24, 65, 58, 64]. Vergleichen wir das Verhältnis der K^+ Multiplizität für Au + Au und Ne + Ne an $b = 0$ fm (für $\theta_{lab} = 41^\circ$), so erhalten wir $R = 30.4$ für NL1, $R = 42.1$ für NL2 und $R = 31.8$ für NL3.

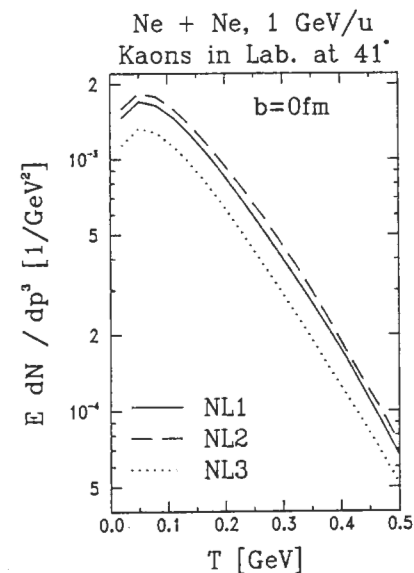


Abbildung 4.4: K^+ Spektrum unter 41° im Lab. für Ne+Ne bei 1 GeV/u und $b = 0$ fm. Durchgezogene Linie: NL1; Gestrichelte Linie: NL2; Gepunktete Linie: NL3.

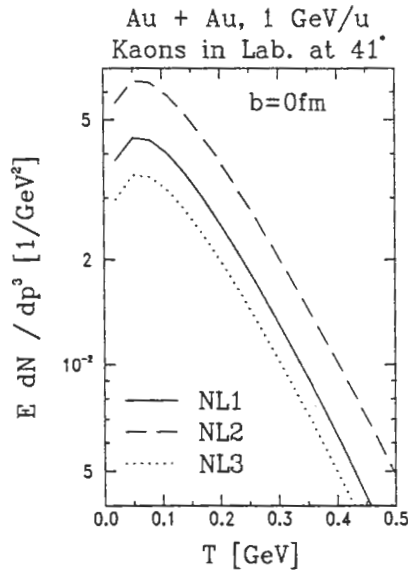


Abbildung 4.5: K^+ Spektrum unter 41° im Lab. für Au+Au bei 1 GeV/u und $b = 0$ fm. Durchgezogene Linie: NL1; Gestrichelte Linie: NL2; Gepunktete Linie: NL3.

Kaon-yield; 1 GeV/u; NL2, $b=0$ fm

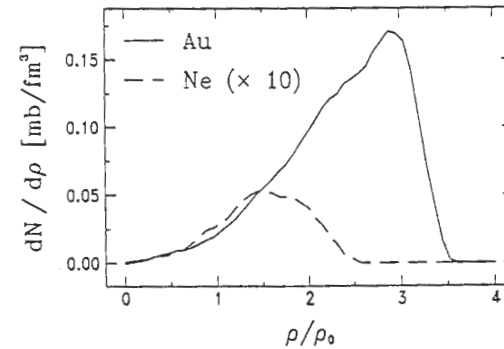


Abbildung 4.6: K^+ Multiplizität als Funktion der Dichte für $b = 0$ fm, $E_{\text{beam}} = 1$ GeV/u an $\theta_{\text{lab}} = 41^\circ$. Parametersatz NL2; Durchgezogene Linie: Au+Au; Gestrichelte Linie: Ne+Ne ($\times 10$).

Dies zeigt eine deutliche Sensitivität auf die Kompressibilität K an.

Den Grund für diese Sensitivität demonstrieren wir in Abbildung 4.6. Hier zeigen wir die differentielle K^+ Multiplizität $dN/d\rho$ als Funktion der Baryondichte ρ/ρ_0 am jeweiligen Produktionspunkt für Ne + Ne (gestrichelte Linie) und Au + Au (durchgezogene Linie) bei 1 GeV/u und $b = 0$ fm. Man kann deutlich erkennen, daß für die Reaktion Au + Au die meisten Kaonen bei $\rho > 2\rho_0$ erzeugt werden, während die Verteilung für Ne + Ne unterhalb $2\rho_0$ zentriert ist. Da die zentrale Dichte stark vom verwendeten Parametersatz abhängt — besonders für schwere Systeme (vergl. Abb. 3 in [54], Abb. 6 in [66]) — sind die K^+ Mesonen besonders gut dazu geeignet, die Hochdichtzone, in der die Kollisionsrate am größten ist ($\sim \rho^2$), während der Kompressionsphase zu untersuchen.

Konsequenterweise skaliert die Massenabhängigkeit der K^+ Multiplizität für zentrale Kollisionen mit unterschiedlichen Exponenten $(A_P \cdot A_T)^x$ für die verschiedenen Zustandsgleichungen, wie in Abbildung 4.7 gezeigt. Wir erhalten $x \approx 0.74$ für NL1, $x \approx 0.82$ für NL2 und $x \approx 0.75$ für NL3. Dies verdeutlicht erneut die Sensitivität auf die Kernkompressibilität K . In zukünftigen Experimenten kann man dieses Skalierungsverhalten zur genaueren Bestimmung von K verwenden, vorausgesetzt daß die Stärke der impulsabhängigen Kräfte (reflektiert in m^*) aus anderen Observablen wie p_x/A bestimmt wird.

Wie in Kapitel 3.5 gezeigt wurde, liefern nur die Parametersätze NL1 und NL2 zufriedenstellende Ergebnisse im Vergleich mit dem Experiment.

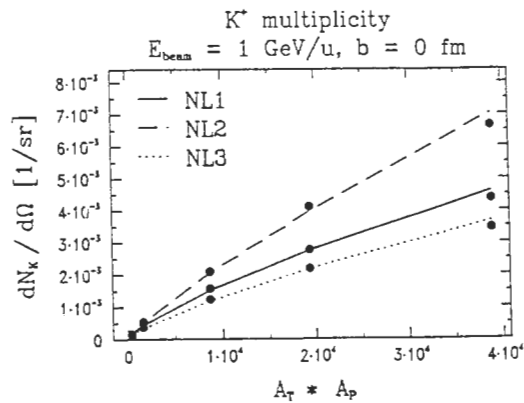


Abbildung 4.7: Massenabhängigkeit der K⁺ Multiplizität für b = 0 fm, E_{beam} = 1 GeV/u an θ_{lab} = 41°. Durchgezogene Linie: NL1; Gestrichelte Linie: NL2; Gepunktete Linie: NL3.

Wir wollen deshalb im Rahmen dieser Untersuchungen die impulsabhängigen Kräfte als durch NL1 (bzw. NL2) festgelegt betrachten.

4.2.2 Stoßparameterabhängigkeit

Da zentrale Kollisionen nur zu einem geringen Teil zu dem inklusiven Wirkungsquerschnitt in einer Schwerionenkollision beitragen, untersuchen wir in diesem Abschnitt die Abhängigkeit der K⁺ Produktion vom Stoßparameter b der Reaktion. Hierzu zeigen wir die berechnete K⁺ Multiplizität (multipliziert mit 2πb) in Abbildung 4.8 für die Reaktion Au + Au bei 1 GeV/u und θ_{lab} = 41° als Funktion von b (durchgezogene Linie); diese funktionale Abhängigkeit kann mittels der Formel

$$\frac{d\sigma}{db} \frac{dN_{K^+}}{d\Omega} \approx 2\pi b N_{K^+}(b=0) \cdot S(b),$$

$$S(b) = \frac{2R^2}{b} \arccos\left(\frac{b}{2R}\right) - b \left(R^2 - \frac{b^2}{4}\right)^{1/2},$$

$$R = 1.14 A^{1/3}, \quad (4.9)$$

für symmetrische Systeme A_P = A_T gut wiedergegeben werden (gestrichelte Linie). Eine vergleichbare Skalierung der exklusiven zu den inklusiven Ausbeuten kann man auch für leichtere Systeme finden.

$$2\pi \int b S(b) db = 7R^2 \sim 54$$

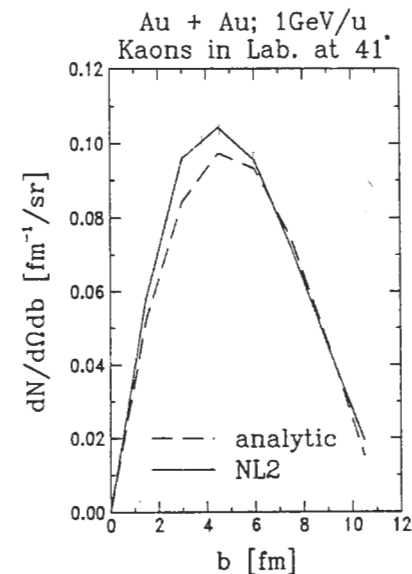


Abbildung 4.8: Stoßparameterabhängigkeit der K⁺ Multiplizität für Au + Au bei 1 GeV/u, θ_{lab} = 41°. Parametersatz NL2, Durchgezogene Linie: Rechnung; Gestrichelte Linie: Analytische Formel (vergl. Text).

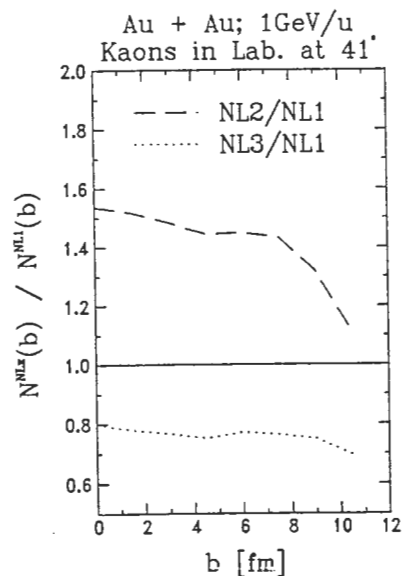


Abbildung 4.9: Verhältnis $N_{L_x}/N_{L_1}(b)$ der K^+ Multiplizität für Au + Au bei 1 GeV/u, $\theta_{lab} = 41^\circ$. Durchgezogene Linie: NL2/NL1; Gestrichelte Linie: NL3/NL1.

Eine wesentlichere Frage ist die Sensitivität der K^+ Produktion auf Änderungen der Zustandsgleichung als Funktion des Stoßparameters, da sich die maximale Dichte stark mit b ändert [54]. Wir zeigen deshalb das Verhältnis der K^+ Multiplizität von NL2 zu NL1 (gestrichelte Linie) und von NL3 zu NL1 (gepunktete Linie) in Abbildung 4.9 für Au+Au bei 1 GeV/u und $\theta_{lab} = 41^\circ$. Wie erwartet sinkt die Sensitivität auf die Kompressibilität K (gestrichelte Linie) mit zunehmendem Stoßparameter, während für festes K außer einer generellen Abnahme von ca. 20% keine wesentliche Änderung festzustellen ist. Es sei allerdings noch einmal angemerkt, daß wir die Parametrisierung NL3 bereits ausgeschlossen haben, da es mit ihr nicht möglich ist die p_x/A gegen y Verteilungen zu reproduzieren (vergl. Abschnitt 3.5). Bis zu Stoßparametern von $b \approx 6$ fm bleibt deshalb eine hohe Sensitivität auf die Kompressibilität, was ca. 60% des gesamten K^+ Wirkungsquerschnitts entspricht (vergl. Abb. 4.8). Dies ist eine vielversprechende Perspektive für zukünftige Experimente. Bei größeren Stoßparametern b bleibt dagegen eine Sensitivität auf die Impulsabhängigkeit; diese könnte benutzt werden um — in peripheren Experimenten — die Impulsabhängigkeit zu bestimmen.

4.2.3 Baryonische Zerlegung

Aus Kaskadenrechnungen [18] ist wohlbekannt, daß schwere Mesonen hauptsächlich in mehrfachen Baryon-Baryon Kollisionen erzeugt werden (vergl. die Diskussion in [58]). Wir wollen deshalb den relativen Beitrag der verschiedenen Reaktionskanäle eingehender studieren. Wir zählen dazu die Anzahl der Kollisionen $N_1 + N_2$, die zwei Baryonen erlitten haben, bevor sie ein K^+ in einer gegenseitigen Wechselwirkung erzeugen und berechnen die entsprechende Produktionswahrscheinlichkeit als Funktion von $N_1 + N_2$ (vergl. [58]) für die Kanäle NN, $N\Delta$ und $\Delta\Delta$ getrennt. Die von uns erhaltenen Verteilungen sind in Abbildung 4.10 für Ne+Ne und in Abbildung 4.11 für Au+Au bei 1 GeV/u gezeigt. Hier stehen die offenen Histogramme für den Kanal $NN \rightarrow K^+ + X$ (multipliziert mit 10), die schraffierten Histogramme für den Kanal $N\Delta \rightarrow K^+ + X$ und die ausgefüllten Histogramme für den Kanal $\Delta\Delta \rightarrow K^+ + Y$. Man kann klar erkennen, daß der NN Prozess für beide Systeme von untergeordneter Bedeutung ist und daß die ΔN Streuung den Wirkungsquerschnitt bei 1 GeV/u dominiert.

Damit könnten die K^+ Mesonen, neben e^+e^- Paaren [67, 68], auch eine Möglichkeit zum Studium der Δ -Dynamik in dichter Kernmaterie sein, vorausgesetzt, daß der elementare K^+ Produktionsquerschnitt genauer bestimmt wird.

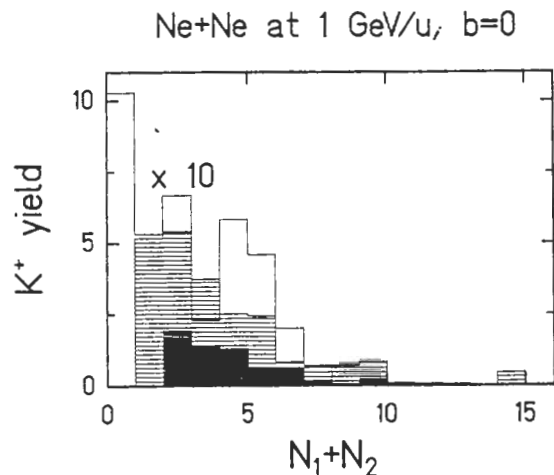


Abbildung 4.10: Baryonische Zerlegung der ein K^+ erzeugenden Kollisionen. Ne + Ne bei 1 GeV/u, $b = 0$ fm. Offene Hist.: NN ($\times 10$); Schraffierte Hist.: $N\Delta$; Gefüllte Hist.: $\Delta\Delta$.

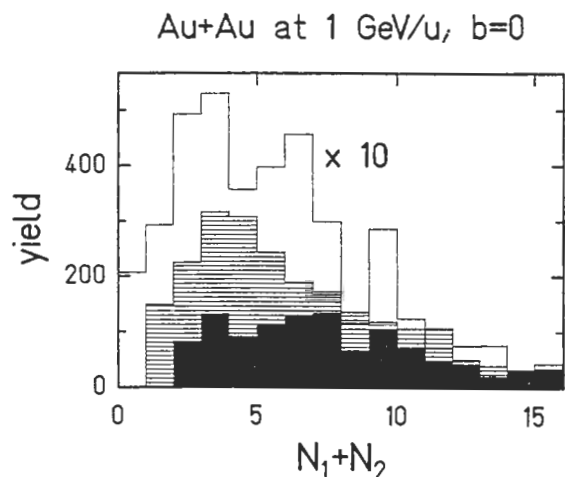


Abbildung 4.11: Baryonische Zerlegung der ein K^+ erzeugenden Kollisionen. Au + Au bei 1 GeV/u, $b = 0$ fm. Offene Hist.: NN ($\times 10$); Schraffierte Hist.: $N\Delta$; Gefüllte Hist.: $\Delta\Delta$.

4.2.4 Sensitivität auf Quasi-Teilchen-Eigenschaften

Wie in Kapitel 1 beschrieben sind die Nukleonen Quasi-Teilchen mit der effektiven Mass $m^* = m - g_s \sigma(x)$ und dem kinetischen Impuls $\Pi_\mu = p_\mu - g_v \omega_\mu(x)$; diese Quasi-Teilchen genügen der Massenschalen-Bedingung $\Pi_\mu(x) \Pi^\mu(x) = m^*(x)^2$. Somit wird die Selbstenergie der Nukleonen in den Quasi-Teilchen-Eigenschaften wiedergespiegelt, und man sollte die Sensitivität der K^+ Produktion auf unterschiedliche in-medium Wirkungsquerschnitte $\sigma_K(\sqrt{s})$ untersuchen. Die Parametrisierung (4.4) hängt nur von den Quasi-Teilchen-Eigenschaften ab. Man ist deshalb versucht, verschiedene Ausdrücke für den in-medium Wirkungsquerschnitt $\sigma_K(m^*, \Pi, m_K)$, der bislang mikroskopischen Studien nicht zugänglich ist, zu verwenden. Der Leser sollte deshalb diesen Abschnitt als einen bloßen phänomenologischen Test der Sensitivität der K^+ Ausbeute auf in-medium Modifikationen der Übergansraten verstehen.

Wir möchten darauf hinweisen, daß wir in den vorangegangenen Abschnitten die freie Kaonenmasse m_K und die Quasi-Teilchenmassen m^* und kinetischen Impulse Π^μ für σ_K in (4.4) verwendet haben. Als erste Änderung dieser Vorschrift vernachlässigen wir den vektoriellen Anteil der Selbstenergie der Nukleonen, d.h. ersetzen Π_μ durch p_μ in Gleichungen (4.4) bis (4.7). Das Resultat für das differentielle K^+ Spektrum ist in Abbildung 4.12 (gestrichelte Linie) in Vergleich mit der bislang verwendeten Parametrisierung (durchgezogene Linie) gezeigt. Es ist ein Anstieg von ca. 20% für die K^+ Ausbeute festzustellen, bedingt dadurch, daß während der gesamten Kollision $\Pi^\mu \Pi_\mu < p^\mu p_\mu$ ist. Die Änderung ist jedoch nicht so groß, wie man vermutet hätte und sollte kleiner als die Unsicherheit in dem elementaren Wirkungsquerschnitt sein.

Als weiteren Test geben wir auch, entsprechend der Argumentation von Brown et al. [69], dem Kaon eine skalare Selbstenergie. Annähernde chirale Invarianz liefert dann $m^*/m \approx m_K^*/m_K$ [69]; dies würde eine drastische Erniedrigung der Schwelle für Kaonen Erzeugung in dem nukleare Medium bedeuten und könnte das K^+ Signal signifikant erhöhen. Allerdings kann ein K^+ Meson der Quasi-Teilchen-Energie $\epsilon_K = \sqrt{k^2 + m_K^{*2}}$ nur für $\epsilon_K > m_K$ aus dem nuklearen Medium emittiert werden. Wir zeigen deshalb das resultierende differentielle K^+ Spektrum unter 90° (gepunktete Linie) als Funktion von $T_{K^+} \equiv \epsilon_{K^+} - m_{K^+}$. Dieses ist fast identisch mit der durchgezogenen Linie, die unter Vernachlässigung der skalaren Mesonen-Selbstenergie erhalten wurde. Wir erwarten somit keine dramatischen Änderungen in der K^+ Produktion durch in-medium Korrekturen, besonders nicht wenn man leichte und schwere Systeme miteinander vergleicht.

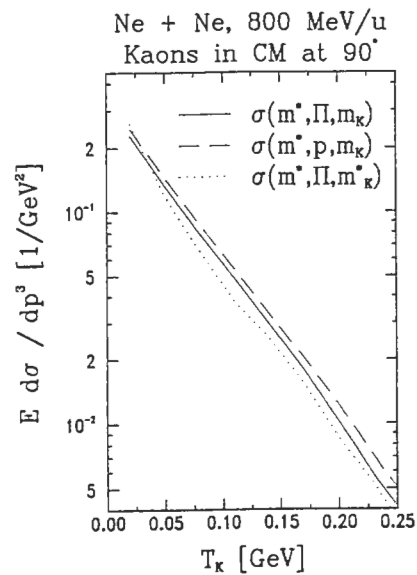


Abbildung 4.12: „In-medium“ Modifikationen des K^+ Wirkungsquerschnitts (s. Text); Ne+Ne bei 800 MeV/u, $b = 0$ fm, $\theta_{CM} = 90^\circ$

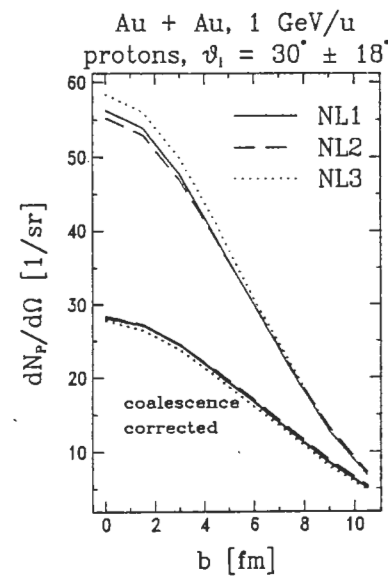


Abbildung 4.13: Protonen-Spektrum als Funktion des Stoßparameters b für die Reaktion Au + Au bei 1 GeV/u. $\theta_{lab} = 12-48^\circ$. Durchgezogen: NL1; Gestrichelt: NL2; Gepunktet: NL3, Dicke Linien: Nur ungebundene Protonen

4.2.5 Vergleich mit ersten Daten der KAOS-Gruppe

Die KAOS-Kollaboration [70] hat erste Messungen der K^+ Produktion in Au + Au Reaktionen bei 1 GeV/u durchgeführt und das inklusive Verhältnis von K^+ zu Protonen in einem spezifischen Winkelbereich durchgeführt. Um einen Vergleich mit ihren Messungen zu ermöglichen, berechnen wir zunächst das doppelt differentielle Protonenspektrum als Funktion des Stoßparameters b im Rahmen unseres Modells für die Parametrisierungen NL1, NL2 und NL3 im Winkelbereich von 12–48°. Dies entspricht der experimentellen Akzeptanz für Protonen [70]. Wir zeigen die Energie-integrierte Protonenmultiplizität in Abbildung 4.13 als Funktion des Stoßparameters. Wie man feststellen kann, ist die Protonenmultiplizität für alle drei verwendeten Parametrisierungen innerhalb von ca. 3% identisch. Für die beiden hier wesentlichen Parametersätze NL1 (durchgezogene Linie) und NL2 (gestrichelte Linie) erhält man sogar im Rahmen der numerischen Genauigkeit identische Ergebnisse. Leider können wir die aus unseren BUU-Rechnungen erhaltenen Protonenspektren nicht direkt mit dem Experiment vergleichen, da dort nur ungebundene Protonen gemessen werden. Wir verwenden deshalb das Koaleszenzmodell, das bereits von Koch et. al. [37] erfolgreich angewendet wurde und durch Berücksichtigung der Endzustandswechselwirkung gebundene Teilchen wie d, t, ^3He , ^4He etc. herausfiltert. Die resultierenden Protonenspektren im Winkelbereich von 12–48° als Funktion des Stoßparameters sind in Abb. 4.13 durch die fetten Linien angedeutet. Man erkennt, daß ca. 40% der Protonen in der Reaktion Au + Au bei 1 GeV/u durch die Endzustandswechselwirkung in Fragmenten gebunden sind.

Das sich schließlich ergebende Verhältnis von K^+ zu freien Protonen ist in Abbildung 4.14 für das gleiche System als Funktion des Stoßparameters b gezeigt. Dieses Verhältnis fällt für alle drei verwendeten Parametersätze NL1, NL2 und NL3 um ca. eine Größenordnung, wenn man von zentralen zu peripheren Reaktionen übergeht. Wie bereits früher festgestellt, ist das Verhältnis für die Parametrisierung NL2 mit der kleinsten Kompressibilität von 210 MeV am größten.

Nach der Integration über den Stoßparameter erhält man für das inklusive Verhältnis K^+ / p $1.7 \cdot 10^{-4}$ für NL1, $2.4 \cdot 10^{-4}$ für NL2 und $1.4 \cdot 10^{-4}$ für NL3. Man sollte dies mit dem experimentell beobachteten Wert von $2\text{--}3 \cdot 10^{-4}$ [71] vergleichen, der eine weiche Zustandsgleichung ($K = 210$ MeV) klar bevorzugen würde. Trotzdem hängt das erhaltene Resultat von der spezifischen Wahl der Parametrisierung des elementaren Wirkungsquerschnitts $BB \rightarrow K^+ Y B$ ab und es erscheint deshalb zu früh, irgendwelche abschließenden Schlüsse über die nukleare Kompressibilität zu ziehen. Hier sollten zunächst noch die experimentellen Resultate für das leichtere System Ne + Ne bei derselben Strahlenergie berücksichtigt werden. Um die Unsicherheiten im Bereich der experimentellen Daten für den elementaren Querschnitt (vergl.

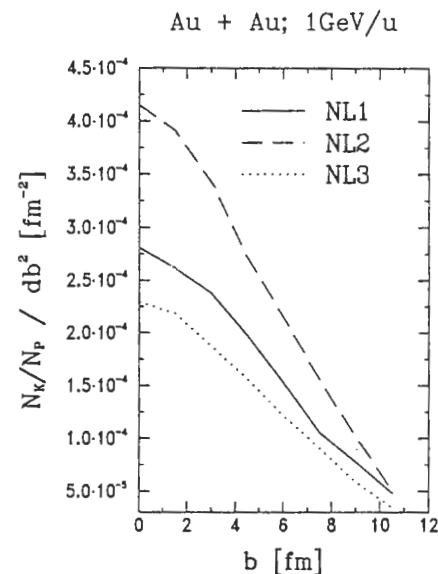


Abbildung 4.14: Verhältnis der totalen K^+ zur Protonen Häufigkeit K^+ / p als Funktion des Stoßparameters b . $\theta_{\text{lab}} = 41^\circ$. Durchgezogen: NL1; Gestrichelt: NL2; Gepunktet: NL3.

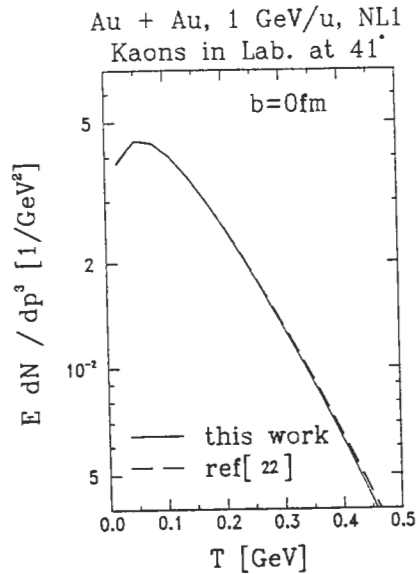


Abbildung 4.15: K^+ Spektrum unter 41° im Lab. für Au + Au bei 1 GeV/u und $b = 0$ fm. Durchgezogene Linie: diese Arbeit; Gestrichelte Linie: Parametrisierung von Zwermann [22]

Abb. 4.1) zu untersuchen, haben wir noch eine Rechnung unter Verwendung der ursprünglichen Parametrisierung von Zwermann [22] durchgeführt. In Abbildung 4.15) zeigen wir die Reaktion Au + Au bei 1 GeV/u für die Parametrisierung NL1. Die durchgezogene Kurve gibt unsere Parametrisierung wieder, die gestrichelte diejenige von Zwermann. Beide Kurven decken sich nahezu perfekt, so daß wir innerhalb der bekannten Variation keine großen Änderungen erwarten.

Abschließend zeigen wir in Abbildung 4.16 die differentiellen Protonen und K^+ Spektren unter 41° im Laborsystem für die Reaktionen Au + Au und Ne + Ne bei 1 GeV/u für die Parametersätze NL1, NL2 und NL3. Da die differentiellen K^+ Spektren im Aussehen relativ ähnlich sind (abgesehen von der absoluten Größe), könnte das K^+ zu freie Protonen Verhältnis sehr gut dazu geeignet sein, unsere Unsicherheit über die nukleare Kompressibilität zu vermindern.

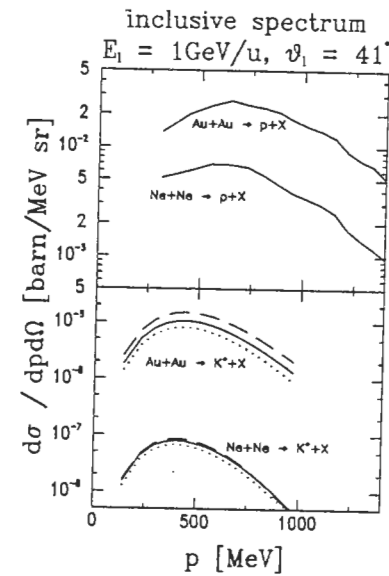


Abbildung 4.16: Differentielle inklusive K^+ und Protonen Spektren für die Reaktionen Au + Au und Ne + Ne bei 1 GeV/u. $\theta_{\text{lab}} = 41^\circ$. Durchgezogen : NL1; Gestrichelt: NL2; Gepunktet: NL3.

Zusammenfassung

Wir haben in dieser Arbeit eine neue Methode — die wir „Local-Ensemble-Algorithmus“ genannt haben — zur Lösung der Kollisions-Integrale in BUU-Simulationen von Schwerionenkollisionen vorgestellt. Alle drei verschiedenen Verfahren, die wir miteinander verglichen haben, — den bislang verwendeten Parallel-Ensemble- und Full-Ensemble-, sowie den Local-Ensemble-Algorithmus — haben dieselben Ergebnisse für alle betrachteten physikalischen Observablen geliefert. Der Local-Ensemble-Algorithmus weist jedoch die folgenden Vorteile im Vergleich mit seinen Vorgängern auf:

- Seine Lösungen werden im Grenzwert $\Delta^3x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ gegen die exakten Lösungen der Boltzmann-Gleichung konvergieren. Im Gegensatz dazu können die Lösungen des Parallel-Ensemble-Algorithmus' nur Approximationen an die exakten Lösungen sein, da er offensichtlich die Lokalität des Kollisions-Integrals verletzt.
- Der Lokal-Ensemble-Algorithmus ist vollständig kovariant und hat keinerlei Probleme mit der Zeitordnung der Kollisionen.
- Während der Full- und Parallel-Ensemble-Algorithmus Komplexitäten von $\mathcal{O}(A \cdot N^2)$ bzw. $\mathcal{O}(A^2 \cdot N)$ aufweisen, wächst die Rechenzeit, die vom Local-Ensemble-Algorithmus benötigt wird, nur linear, d.h. wie $\mathcal{O}(A \cdot N)$. Wie wir gezeigt haben, können die Einsparungen in der Rechenzeit erheblich sein. Faktoren von 5–10 sind leicht zu erreichen. Des weiteren wird jede Zelle im Konfigurationsraum vollständig unabhängig von allen anderen behandelt. Dies erlaubt die Verwendung modernster Rechentechniken wie massive Parallelisierung und Vektorisierung, und verbessert die Situation noch weiter.

Wir haben weiterhin in dieser Arbeit eine zuverlässige Methode vorgestellt, lokale Drücke und Temperaturen im Rahmen eines kovarianten Transportmodells für Schwerionenkollisionen zu berechnen. Durch Variation der Parameter der zugrundeliegenden Lagrange-Dichte, die in Bezug zu der Zustandsgleichung für kalte Kernmaterie steht, geben unsere Berechnungen obere und untere Schranken für diese thermodynamischen Größen.

Wir finden, daß der maximale Druck insensitive auf die Zustandsgleichung ist. Wie haben versucht, den maximal erreichten Druck mit dem experimentell gemessenen Fluß zu korrelieren. Obwohl es tatsächlich eine starke Korrelation zwischen diesen Größen gibt, bemerken wir auch eine Abhängigkeit von der verwendeten Parametrisierung, d.h. von der Kompressibilität und der Impulsabhängigkeit. Deshalb, und weiterhin da der transversale Fluß nur schwach von dem maximalen transversalen Druck abhängt, schließen wir, daß es derzeit unmöglich ist, aus dem gemessenen transversalen Fluß den transversalen Druck zu ermitteln.

Unsere Berechnungen zeigen, daß das System erst in der späten Expansionsphase, in der die Dichte bereits stark abgefallen ist, das lokale Gleichgewicht erreicht. Dies wird für niedrige System-Massen besonders ausgeprägt und weist darauf hin, daß für diese Reaktionen hydrodynamische Beschreibungen nicht verwendet werden können. Zum Abschluß unserer thermodynamischen Analyse haben wir die Entropie pro Nukleon durch Integration über den vollständigen Phasenraum berechnet. Wir finden, daß der erreichte Grenzwert der Entropie nur schwach von der Impulsabhängigkeit und der Kompressibilität abhängt.

Der dritte Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigte sich mit der perturbativen Erzeugung seltsamer Mesonen im Rahmen des vorgestellten Transportmodells. Wir haben die ersten kovarianten Rechnungen der K^+ Produktion bei Energien unterhalb der Schwelle durchgeführt und die Sensitivität der differentiellen K^+ Häufigkeit auf unterschiedliche Parametrisierungen der zugrundeliegenden Lagrangedichte — und damit auf Variationen der Zustandsgleichung kalter Kernmaterie — untersucht. Wie in [34, 58] vorgeschlagen wurde, haben wir Sensitivität der K^+ Häufigkeit auf die Kernkompressibilität dann dazu verwandt, erste Informationen über diese Größe zu erhalten. Während für das leichte System $Ne + Ne$ bei 1 GeV/u keine Sensitivität festzustellen ist, wächst die K^+ Häufigkeit für die Reaktion $Au + Au$ bei 1 GeV/u für zentrale Stöße um einen Faktor drei, wenn man die Kernkompressibilität von 380 MeV auf 210 MeV erniedrigt. Ein erster Vergleich mit den inklusiven Daten der KAOS Gruppe für das K^+ / p Verhältnis scheint tatsächlich eine kleinere Kompressibilität K von 210 MeV zu favorisieren, im Gegensatz zu früheren Vermutungen in [9]. Diese Vermutung mag allerdings noch verfrüht sein, da die Ergebnisse noch vom verwendeten elementaren Produktionsquerschnitt $BB \rightarrow K^+ Y B$ abhängen.

Obwohl wir nicht erwarten, daß in-medium Modifikationen des Wirkungsquerschnitts die differentiellen K^+ Spektren stark beeinflussen (vgl. Abschnitt 4.2.4), ist der totale Wirkungsquerschnitt nahe an der Schwelle im wesentlichen unbekannt. Wir haben deshalb, analog zu [63], vorgeschlagen, das Verhältnis der K^+ Produktion für leichte und schwere Systeme bei derselben Strahlenergie zu untersuchen, um die Unsicherheit in dem elementaren Produktionsquerschnitt weitgehend aufzuheben. In dieser Hinsicht haben wir

detaillierte Spektren von freien Protonen und K^+ Mesonen für die Reaktionen $Au + Au$ und $Ne + Ne$ bei 1 GeV/u, durch die Wahl des Beobachtungswinkels $\theta_{lab} = 41^\circ$ zugeschnitten auf die Detektorakzeptanz der KAOS Kollaboration [70], berechnet, die somit in der nächsten Runde von Experimenten verwendet werden können, um obere und untere Schranken für die Kernkompressibilität zu gewinnen. Abschließend möchten wir noch bemerken, daß bei 1 GeV/u die meisten K^+ Mesonen durch $N\Delta$ Reaktionen erzeugt werden. Damit könnte das Studium der differentiellen K^+ Multiplizität, neben dem der Dileptonen [67, 68], die Möglichkeit bieten, die in-medium Eigenschaften der Δ -Resonanz in dichter Kernmaterie zu untersuchen.

Literaturverzeichnis

- [1] WESTFALL, G.; GOSSET, J.; JOHANNSEN, P.; POSKANZER, A.; MEYER, W.; GUTBROD, H.; SANDOVAL, A.; and STOCK, R.:
Nuclear fireball model for proton inclusive spectra from relativistic heavy-ion collisions.
Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1202.
- [2] NAGAMIYA, S.; LEMAIRE, M.; MOELLER, E.; SCHNETZER, S.; SHAPIRO, G.; STEINER, H.; and TANIHATA, I.:
Production of pions and light fragments at large angles in high-energy nuclear reactions.
Phys. Rev. C **24** (1981) 971.
- [3] STOCK, R.:
Particle production in high energy nucleus-nucleus collisions.
Phys. Rep. **135** (1986) 259.
- [4] SANDOVAL, A.; GUTBROD, H.; MEYER, W.; STOCK, R.; LUCKNER, C.; POSKANZER, A.; GOSSET, J.; JOURDAIN, J.; KING, C.; KING, G.; SEN, N. V.; WESTFALL, G.; and WOLF, K.:
Spectra of p, d and t from relativistic nuclear collisions.
Phys. Rev. C **21** (1980) 1321.
- [5] NAGAMIYA, S. and GYULASSY, M.:
High-energy nuclear collisions.
In Negele, J. and Vogt, E., editors, *Adv. Nucl. Phys.*, volume 13, page 201. Plenum Press, (1984).
- [6] KAMPERT, K.-H.:
Shock compression of hadronic matter in high-energy heavy-ion collisions.
J. Phys. G **15** (1989) 691.
- [7] GUTBROD, H. H.; POSKANZER, A. M.; and RITTER, H. G.:
Plastic ball experiments.
Rep. Prog. Phys. **52** (1989) 1267.
- [8] CLARE, R. and STROTTMAN, D.:
Relativistic hydrodynamics and heavy-ion reactions.

- Phys. Rep.* **141** (1986) 177.
- [9] STÖCKER, H. and GREINER, W.:
High energy heavy-ion collisions: Probing the equation of state of nuclear matter.
Phys. Rep. **137** (1986) 277.
- [10] CUGNON, J.; MIZUTANI, T.; and VANDERMEULEN, J.:
Equilibration in relativistic nuclear collisions.
Nucl. Phys. **A352** (1981) 505.
- [11] RANDRUP, J.:
Equilibration in nuclear matter.
Nucl. Phys. **A314** (1979) 429.
- [12] SCHNETZER, S.; LEMAIRE, M. C.; LOMBARD, R.; MOELLER, E.; NAGAMIYA, S.; SHAPIRO, G.; STEINER, H.; and TANIHATA, I.:
Production of K^+ mesons in 2.1 GeV/nucleon nuclear collisions.
Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 989.
- [13] NAGAMIYA, S.:
Role of mean free path of product particles in high-energy nucleus-nucleus collisions.
Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1383.
- [14] SCHNETZER, S.; LOMBARD, R. M.; LEMAIRE, M. C.; MOELLER, E.; NAGAMIYA, S.; SHAPIRO, G.; STEINER, H.; and TANIHATA, I.:
Inclusive production of K^+ mesons in 2.1 GeV/nucleon nuclear collisions.
Phys. Rev. **C40** (1989) 640.
- [15] RANDRUP, J. and KO, C. M.:
Kaon production in relativistic nuclear collisions.
Nucl. Phys. **A343** (1980) 519.
- [16] RANDRUP, J. and KO, C. M.:
Revision of calculations for kaon production in relativistic nuclear collisions.
Nucl. Phys. **A411** (1983) 537.
- [17] RANDRUP, J.:
Kaon rescattering in relativistic nuclear collisions.
Phys. Lett. **B99** (1981) 9.
- [18] CUGNON, J. and LOMBARD, R. M.:
 K^+ production in a cascade model for high-energy nucleus-nucleus collisions.
Nucl. Phys. **A422** (1984) 635.

- [19] CUGNON, J. and LOMBARD, R. M.:
Kaon production in high energy nucleus-nucleus collisions.
Phys. Lett. **B134** (1984) 392.
- [20] ZWERMANN, W.; SCHÜRMANN, B.; DIETRICH, K.; and MARTSCHEW, E.:
Transport theory applied to kaon production in high energy nucleus-nucleus collisions.
Phys. Lett. **B134** (1984) 397.
- [21] ZWERMANN, W. and SCHÜRMANN, B.:
The inclusive production of kaons in relativistic nucleus-nucleus collisions.
Nucl. Phys. **A423** (1984) 525.
- [22] ZWERMANN, W.:
Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) 251.
- [23] BARZ, H. W. and IWE, H.:
Calculation of kaon production in heavy ion collisions within the cascade model.
Phys. Lett. **B 143** (1984) 55.
- [24] AICHELIN, J. and KO, C. M.:
Subthreshold kaon production as a probe of the nuclear equation of state.
Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2661.
- [25] AICHELIN, J.; ROSENHAUER, A.; PEILERT, G.; STÖCKER, H.; and GREINER, W.:
Importance of momentum-dependent interactions for the extraction of the nuclear equation of state from high-energy heavy-ion collisions.
Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1926.
- [26] ABROSIMOV, N. K.; VOLCHENKOV, V. A.; GRIDNEV, A. B.; ELISEEV, V. A.; IVANOV, E. M.; KOPTEV, V. P.; KRUGLOV, S. P.; MALOV, Y. A.; KIKIRTYCH'YANTS, S. M.; RYABOV, G. A.; and SHCHERBAKOV, G. V.:
Subthreshold production of K^+ mesons by protons in the energy range 800 - 1000 MeV at the Be, C, Cu, Sn and Pb nuclei.
Sov. Phys. JETP Lett. **43** (1986) 270.
- [27] KOPTEV, V. P.; MIKIRTYCH'YANTS, S. M.; NESTROV, M. M.; TARASOV, N. A.; SHCHERBAKOV, G. V.; ABROSIMOV, I. K.; VOLCHENKOV, V. A.; GRIDNEV, A. B.; ELISEEV, V. A.; IVANOV, E. M.; KRUGLOV, S. P.; MALOV, Y. A.; and RYABOV, G. A.:
Subthreshold K^+ meson production in proton-nucleus interactions.

- Sov. Phys. JETP* **67** (1988) 2177.
- [28] CASSING, W.; BATKO, G.; BLÄTTEL, B.; KOCH, V.; LANG, A.; MOSEL, U.; NIITA, K.; WEBER, K.; and WOLF, G.:
Dynamics of heavy-ion reactions and the nuclear equation of state.
Nucl. Phys. A **519** (1990) 357c.
- [29] BATKO, G.; CASSING, W.; MOSEL, U.; NIITA, K.; and WOLF, G.:
Dilepton and kaon production at Sis-energies.
In Feldmeier [72], page 174.
- [30] XIONG, L.; KO, C. M.; and WU, J. Q.:
Contribution of $\pi N \rightarrow AK$ to subthreshold kaon production in heavy ion collisions.
Phys. Rev. C **42** (1990) 2231.
- [31] SEROT, B. D. and WALECKA, J. D.:
The relativistic nuclear many-body problem.
In Negele, J. and Vogt, E., editors, *Adv. Nucl. Phys.*, volume 16, page 1.
Plenum Press, (1986).
- [32] WEBER, K.:
Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung im Rahmen des relativistischen Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck Modells.
Diplomthesis, University of Giessen (1989).
unpublished.
- [33] WEBER, K.; BLÄTTEL, B.; KOCH, V.; LANG, A.; CASSING, W.; and MOSEL, U.:
The Relativistic BUU Approach: Analysis of retardation effects and meson-field radiation.
Nucl. Phys. A **515** (1990) 747.
- [34] CASSING, W. and MOSEL, U.:
Many-body theory of high energy heavy-ion reactions.
Prog. Part. Nucl. Phys. **25** (1990) 235.
- [35] LANG, A.:
Thermodynamische Analyse hochenergetischer Schwerionen-Kollisionen im Rahmen der relativistischen Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck Gleichung.
Diplomthesis, University of Giessen (1989).
unpublished.
- [36] NEISE, L.; BERENQUER, M.; HARTNACK, C.; PEILERT, G.; STÖCKER, H.; and GREINER, W.:
Quantum molecular dynamics — a model for nucleus-nucleus collisions from medium to high energies.
Nucl. Phys. A **519** (1990) 375c.
- [37] KOCH, V.; BLÄTTEL, B.; CASSING, W.; and MOSEL, U.:
Nucl. Phys. A (1991) in print.
- [38] BERTSCH, G. F. and GUPTA, S. D.:
A guide to microscopic models for intermediate energy heavy ion collisions.
Phys. Rep. **160** (1988) 189.
- [39] GROOT, S. R. D.; LEEUWEN, W. A. V.; and WEERT, C. G. V.:
Relativistic kinetic theory.
North Holland, (1980).
- [40] SCHÜRMANN, B.; ZWERMANN, W.; and MALFLIET, R.:
Analytical treatment of high-energy nucleus-nucleus collisions.
Phys. Rep. **147** (1987) 1.
- [41] BOTERMANS, W. and MALFLIET, R.:
Quantum transport theory of nuclear matter.
Phys. Rep. **198** (1990) 115.
- [42] WELKE, G. M.; MALFLIET, R.; GREGOIRE, C.; PRAKASH, M.; and SURAUD, E.:
Collisional relaxation in simulations of heavy-ion collisions using Boltzmann-type equations.
Phys. Rev. C **40** (1989) 2611.
- [43] GROPENGIESSER, F.; NEUNZERT, H.; and STRUCKMEIER, J.:
Computational methods for the Boltzmann equation.
In Spigler, R., editor, *Venice 1989: The State of Art in Appl. and Industrial Math.* Kluwer acad. publ., (1990).
- [44] BABOVSKY, H.:
A convergence proof for Nanbu's Boltzmann simulation scheme.
Eur. J. Mech. **B8** (1989) 41.
- [45] BABOVSKY, H. and ILLNER, R.:
A convergence proof for Nanbu's simulation method for the full Boltzmann equation.
Siam J. Numer. Anal. **26** (1989) 45.
- [46] GUTBROD, H. H.; KAMPERT, K. H.; KOLB, B. W.; POSKANZER, A. M.; RITTER, H. G.; and SCHMIDT, H. R.:
Rapidity distributions of Ca + Ca, Nb + Nb, Ne + Au and Au + Au at bombarding energies from 250 to 2100 MeV/nucleon.
Z. Phys. **A337** (1990) 57.
- [47] REINHARD, P. G. and CUSSON, R. Y.:
A comparative study of Hartree-Fock iteration techniques.
Nucl. Phys. A **378** (1982) 418.

- [48] ITZYKSON, C. and ZUBER, J.-B.:
Quantum field theory.
McGraw-Hill, (1986).
- [49] SEXL, R. U. and URBANTKE, H. K.:
Relativität Gruppen Teilchen.
Springer, (1976).
- [50] BERTSCH, G. F. and CUGNON, J.:
Entropy production in high energy collisions.
Phys. Rev. C24 (1981) 2514.
- [51] SCHMIDT FOR PLASTIC BALL, H. R.; WA-80 Collaboration; HAHN, D.; and STÖCKER, H.:
Entropy production in heavy-ion reactions from 150 A MeV to 200 A GeV bombarding energy.
In Harris, J. and Wozniak, G., editors, *Proc. of the 8th high energy heavy ion study*, page 142. Lawrence Berkeley Laboratory, Nov. 16-20 1987.
- [52] BLÄTTEL, B.; KOCH, V.; CASSING, W.; and MOSEL, U.:
Covariant Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck approach for heavy-ion collisions.
Phys. Rev. C38 (1988) 1767.
- [53] BLÄTTEL, B.; KOCH, V.; WEBER, K.; CASSING, W.; and MOSEL, U.:
Transverse Momentum Analysis in the Relativistic BUU Approach.
Nucl. Phys. A495 (1989) 381c.
- [54] BLÄTTEL, B.; KOCH, V.; LANG, A.; WEBER, K.; CASSING, W.; and MOSEL, U.:
Origin of transverse momentum in relativistic heavy-ion collisions: microscopic study.
Phys. Rev. C43 (1991) 2728.
- [55] DANIELEWICZ, P.; STRÖBELE, H.; ODYNIEC, G.; BANGERT, D.; BOCK, R.; BROCKMANN, R.; HARRIS, J. W.; PUGH, H. G.; RAUCH, W.; RENFORDT, R. E.; SANDOVAL, A.; SCHALL, D.; SCHROEDER, L. S.; and STOCK, R.:
Collective motion in nucleus-nucleus collisions at 800 MeV/nucleon.
Phys. Rev. C38 (1988) 120.
- [56] COOPER, E. D.; CLARK, B. C.; KOZAK, R.; SHIM, S.; HAMA, S.; JOHANSSON, J. I.; SHERIF, H. S.; MERCER, R. L.; and SEROT, B. D.:
Global optical potentials for elastic $p + {}^{40}\text{Ca}$ scattering using the Dirac equation.
Phys. Rev. C36 (1987) 2170.

- [57] HAMA, S.; CLARK, B. C.; COOPER, E. D.; SHERIF, H. S.; and MERCER, R. L.:
Global Dirac optical potentials for elastic proton scattering from heavy nuclei.
Phys. Rev. C41 (1990) 2737.
- [58] CASSING, W.; METAG, V.; MOSEL, U.; and NIITA, K.:
Production of energetic particles in heavy-ion reactions.
Phys. Rep. 188 (1990) 363.
- [59] KO, C. M.:
Phys. Rev. C23 (1981) 2760.
- [60] LAGET, J. M.:
Strangeness production in nucleon-nucleon collisions.
Phys. Lett. B259 (1991) 24.
- [61] BHALERAO, R. S. and LIU, L. C.:
Off-shell model for threshold pionic η production on a nucleon and for ηN scattering.
Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 865.
- [62] LAGET, J. M.; WELLERS, F.; and LECOLLEY, J. F.:
Radial vibrations in the $\text{Su}(3)$ skyrme model and the Nn interaction.
Phys. Lett. B257 (1991) 254.
- [63] SCHÜRMANN, B. and ZWERMANN, W.:
Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 1441.
- [64] WU, J. Q. and KO, C. M.:
Medium effect on kaon production from heavy-ion collisions.
Nucl. Phys. A499 (1989) 810.
- [65] CASSING, W.; BATKO, G.; MOSEL, U.; NIITA, K.; SCHULT, O.; and WOLF, G.:
Subthreshold K^+ -production in proton-nucleus reactions.
Phys. Lett. B 238 (1990) 25.
- [66] LANG, A.; BLÄTTEL, B.; CASSING, W.; KOCH, V.; ; MOSEL, U.; and WEBER, K.:
Dynamical and thermal aspects of relativistic heavy-ion collisions.
Z. Phys. A, in press (1991) .
- [67] WOLF, G.; BATKO, G.; CASSING, W.; MOSEL, U.; NIITA, K.; and SCHÄFER, M.:
Dilepton production in heavy-ion collisions.
Nucl. Phys. A517 (1990) 615.
- [68] WOLF, G.; CASSING, W.; MOSEL, U.; and SCHÄFER, M.:
Dilepton production at intermediate-energy heavy-ion collisions.

- Phys. Rev. C* **43** (1991) 1501.
- [69] BROWN, G. E.; KO, C. M.; WU, Z. G.; and XIA, L. H.:
Kaon production from hot and dense matter formed in heavy-ion collisions.
Phys. Rev. C **43** (1991) 1881.
- [70] SENGER, P. and KAOS-Collaboration:
Planned kaon experiments at SIS.
In Feldmeier [72], page 144.
- [71] SENGER, P. and GROSSE, E.
private communication.
- [72] Feldmeier, H., editor:
Proc. International Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations XVIII. Hirschegg, Austria, Jan. 1990.

Anhang A

Das Transportprogramm

A.1 Einführung

Das vorliegende Kapitel gibt einen Überblick über die wesentlichen Teile des Transportprogramms. Vom logischen Aufbau lassen sich grob drei Teile unterscheiden: Zunächst die Initialisierungsroutinen, die die Kontroll- und Steuerparameter einlesen, Felder und Variablen auf bekannte Anfangswerte setzen, sowie den Anfangszustand der Reaktion aufbauen (INIT). Für die Initialisierung der Kerne im Ortsraum hat man, neben der Angabe des Kernmittelpunktes in der x-z-Ebene (Reaktionsebene), die Wahl zwischen einer Kasteninitialisierung und einer Woods-Saxon-Form. Letztere erzeugt einen „realistischeren“ Kern als das Kastenpotential; die Kasteninitialisierung dient im wesentlichen zur Abschätzung von Oberflächeneffekten (im Vergleich mit der Woods-Saxon-Form).

Bevor wir den zweiten Teil des Transportprogramms besprechen (nämlich die dynamische Simulation), sei erst die Diskussion des dritten Teils, die Berechnung der physikalischen Observablen, vorangestellt. Hier bieten sich zwei verschiedene Ansätze an: Die Berechnung während der Laufzeit der eigentlichen Simulation (d.h. „On-Line“) oder unabhängig vom Transportprogramm, d.h. „Off-Line“. Für eine „On-Line“-Datenverarbeitung spricht der wesentlich geringere Bedarf an permanentem Speicherplatz (DASD). Eine „Off-Line“-Datenverarbeitung bietet dagegen die Möglichkeit, die Daten unter verschiedenen Gesichtspunkten zu analysieren. Unter Umständen ergeben sich neue Fragestellungen nach der Berechnung der interessierenden Observablen, die durch eine zusätzliche Auswertung der vorhandenen Daten beantwortet werden können, ohne eine erneute Simulation nötig zu machen. Weitere Vorteile sind der geringere Rechenzeitbedarf für das Transportprogramm und der reduzierte Speicherbedarf an Hauptspeicher. Ein weiterer Vorteil gegenüber der „On-Line“-Verarbeitung ergibt sich durch die Vereinfachung der Programmstruktur, die nur noch auf die wesentlichen Routinen

für die Reaktionsdynamik beschränkt ist. Dies reduziert Fehlerhäufigkeit und vereinfacht die Fehlersuche. Ein Nachteil der „Off-Line“-Verarbeitung ist allerdings der große Bedarf an permanentem Speicher. Diesen kann man durch Beschränkung auf einen Teil der Zeitschritte etwas reduzieren. Selbstverständlich ist es hier unverzichtbar die Daten binär abzuspeichern und zu komprimieren. (Anmerkung: Die GSI bietet hierzu eine vektorisierte Routine in der VENUS-Bibliothek an). Wir haben uns wegen der doch überzeugenden Überlegenheit für die „Off-Line“-Datenverarbeitung entschieden.

Als Speicherorganisation wurden „key-sequenced“ VSAM-Dateien verwandt. Gegenüber anderen Organisationsformen bieten diese den Vorteil, auf einen Datensatz schnell mittels eines Schlüssels („Key“) zugreifen zu können. Ein solcher Key könnte beispielsweise „T100„P0“ sein und würde den Vektor mit den Testteilchenenergien für den Zeitschritt 100 identifizieren.

In der dynamischen Simulation kann man zwei Teile unterscheiden: Zum einen die Propagation der Testteilchen im mittleren Potential der Mesonenfelder, zum anderen die Lösung des Kollisionsintegrals durch Zwei-Teilchen-Stöße. Entsprechend dieser Unterteilung gibt es auch drei Optionen für die Simulation: Reine Kaskadenrechnung (d.h. Vernachlässigung des mittleren Potentials), Vlasov-Rechnung (d.h. Vernachlässigung der Zwei-Teilchen-Stöße) und volle Lösung der RBUU-Gleichung. Es sei darauf hingewiesen, daß in der vorliegenden Fassung des Transportprogramms die Testteilchen bei einer Kaskadenrechnung keinen Fermi-Impuls bekommen. Die Lösung des Stoßterms erfolgt, wie in Kap. 2.2.2 beschrieben, mit dem „Local-Ensemble“-Algorithmus.

Zur Berechnung der Pauli-Blockingfaktoren werden die Testteilchen in ein Gitter mit der doppelten Schrittweite des Mesonenfeldgitters eingeordnet. Um nun die Phasenraumverteilungsfunktion $f(x, p)$ am Ort (x, p) zu bestimmen, bieten sich zwei Verfahren an: Die Funktion $f(x, p)$ wird an der Stelle (x, p) ausgewertet, sobald der entsprechende Wert benötigt wird. Dabei wird nicht berücksichtigt, daß eventuell Funktionswerte mehrmals verwendet werden könnten. Dieses Verfahren läßt sich nur schlecht optimieren. Es ist deshalb dann günstig, wenn nur wenige Blockingfaktoren aus kinematisch sehr unterschiedlichen Gebieten benötigt werden. Die zweite Möglichkeit wäre die Einführung eines sechs-dimensionalen Phasenraumgitters. Da alle Kollisionen in einer Zelle lokal nacheinander abgearbeitet werden, reduziert sich dieses auf ein drei-dimensionales Impulsraumgitter. Wegen der ungünstigen kinematischen Ausgangssituation (zwei wohl separierte Fermi-Ellipsoide) benötigt man trotz dieser Vereinfachung sehr viele Gitterzellen, wenn man eine zum ersten Verfahren vergleichbare Genauigkeit erreichen will. Ein Impulsraumgitter ist deshalb erst dann sinnvoll, wenn man sehr viele Blockingfaktoren sehr oft benötigt. Dies ist z.B. für die Teilchenproduktion der Fall. Man kann dieses Verfahren etwas verbessern, wenn man berücksichtigt, daß nur wenige Zellen im Impulsraumgitter (im Vergleich zu

dessen Gesamtgröße) besetzt sind: Beim Aufbau des Gitters merkt man sich, welche Zellen besetzt (d.h. „dirty“) sind. Somit muß man beim anschließenden Rücksetzen der Feldwerte auf Null nur auf diese Elemente zugreifen.

Verglichen mit der eigentlichen Lösung der Testteilchenbewegungsgleichungen mittels eines Prediktor-Korrektor-Verfahrens ist die Berechnung und das Glätten der Dichten und Felder sehr zeitaufwendig. Es hat sich hier als sinnvoll erwiesen, die Testteilchenvektoren, entsprechend der jeweiligen Position der Testteilchen im Mesonenfeldgitter, zu ordnen. Dies muß bei jeder Bewegung der Testteilchen im Gitter neu erfolgen. Berücksichtigt man diese Ordnung, so erreicht man, daß Zugriffe auf konsekutive Feldelemente aus dem Prozessor-Cache befriedigt werden. Weiterhin ermöglicht dies eine effiziente Vektorisierung der Dichteberechnung. Das Sortieren der Testteilchenvektoren erfolgt in der Routine XSORT.

A.2 Globale Variablen und Parameter

A.2.1 Parameter

MAXPAR: Maximal mögliche Anzahl von Testteilchen

MAXTSK: Maximale Anzahl von logischen Prozessoren für die Parallelisierung in SMEAR

MAXX, MAXZ: Anzahl der Gitterpunkte in positiver x- bzw. z-Richtung

NX, NZ: Gesamtanzahl der Gitterpunkte in x- bzw. z-Richtung

MA2X, MA2Z: Definiert ein Gitter mit der doppelten Schrittweite (z.B. für Pauli-Blocking)

SIG: 55 [mb]; Totaler NN-Wirkungsquerschnitt an der Niederenergie-Schwelle

HBARC: $\hbar c = 197.33$ MeV

HQC: $\hbar c = 0.19733$ GeV

PIMASS: $m_\pi = 0.1384$ GeV

DELTm: $m_\Delta = 1.231$ GeV

RMO: $m_N = 0.9383$ GeV

AMU: $m_N = 4.755$ fm⁻¹

SURFAC: Oberflächendicke für Woods-Saxon-Initialisierung

A.2.2 Variablen

Testteilchen-Vektoren im Dynamic Common /PART/

R(3,MAXPAR): Ortskoordinaten der Testteilchen

P(0:3,MAXPAR): Energie und Impuls der Testteilchen

XMEFF(MAXPAR), XMREST(MAXPAR) : Effektive und Ruhemasse der Testteilchen

ID(MAXPAR): Anzahl der Kollisionen eines Testteilchens und seine Identität:
ID < 0: Projektil, ID > 0: Target.

RK(3,MAXPAR), PK(0:3,MAXPAR): Orts- und Impulskoordinaten für Korrektorschritt

Felder im Dynamic Common /MESON/

SIGMA (-MAXX:MAXX,-MAXX:MAXX,-MAXZ:MAXZ,-2:0): σ Feldstärke;
die vierte Dimension enthält die Zeitschritte -2..0.

OMEGA (-MAXX:MAXX,-MAXX:MAXX,-MAXZ:MAXZ,0:3,-2:0): ω Feldstärke;
die vierte Dimension entspricht den Lorentz-Indizes, die fünfte Dimension enthält die Zeitschritte -2..0.

SIGMS (-MAXX:MAXX,-MAXX:MAXX,-MAXZ:MAXZ) : Geglättetes σ Feld.

OMEGS (-MAXX:MAXX,-MAXX:MAXX,-MAXZ:MAXZ,0:3,-2:0): Geglättetes ω Feld.

RHOS(-MAXX:MAXX,-MAXX:MAXX,-MAXZ:MAXZ) : Skalare Dichte ρ_s .

RHOV(-MAXX:MAXX,-MAXX:MAXX,-MAXZ:MAXZ,0:3) : Vektordichte ρ_v .

A.2.3 Äquivalente Adressen

Zur besseren Vektorisierung empfiehlt es sich, mehrdimensionale Felder auf eindimensionale Vektoren abzubilden. Die oben aufgeführten Felder können auch durch die folgenden äquivalenten Adressen angesprochen werden:

R(.,.)	≡	RV(.)
P(.,.)	≡	PV(.)
RK(.,.)	≡	RKV(.)
PK(.,.)	≡	PKV(.)
SIGMA(.,.,.,.)	≡	SIGVEC(.,.)
OMEGA(.,.,.,.)	≡	OMEVEC(.,.)
RHOS(.,.,.)	≡	RHSVEC(.,.)
RHOV(.,.,.,.)	≡	RHVVEC(.,.)

A.2.4 Sortierfelder

IV(MAXPAR): Index des Testteilchens in IGP. Berechnet sich mittels FORTRAN-Konvention aus der Abbildung eines drei-dimensionalen Feldes auf die physikalische Speicherstelle.

IGP(NX*NX*NZ): Startadresse des ersten Testteilchens in der Gitterzelle.

NGP(NX*NX*NZ): Anzahl der Testteilchen in der Gitterzelle.

IIX(MAXPAR), IIY(MAXPAR), IIZ(MAXPAR): Gitterkoordinaten des Testteilchens.

A.3 Das Hauptprogramm MAIN

Funktion: Steuerung des Programmablaufs

Wichtige lokale Variablen

- NT: Aktueller Zeitschritt
- NTMAX: Letzter zu berechnender Zeitschritt
- NEFF: Anzahl der Teilchen, die sich noch im Gitter befinden. Anmerkung: Teilchen außerhalb des Gitters werden frei propagiert.
- CPUTIM: Verbraachte CPU-Zeit.
- LIMIT: Erlaubte CPU-Zeit.
- IVSAM: Wenn die Ausgabe auf ein VSAM-Dataset erwünscht ist, ist diese Variable gleich eins.
- ITSTEP, IPSKIP: Zeitschrittweite und Bruchteil der auszugebenden Testteilchen für VSAM.
- NFPRI, NFSUM: Zeitschrittweite für Ausdruck von Dichte bzw. SUMMARY.
- NCBTOT, NCATOT, etc.: Zähler der Kollisionen, getrennt für die einzelnen Kanäle, vor und nach Pauli-Blocking usw.

Programtablaufplan: s. Abbildung A.1

Programmlisting: Seite 85

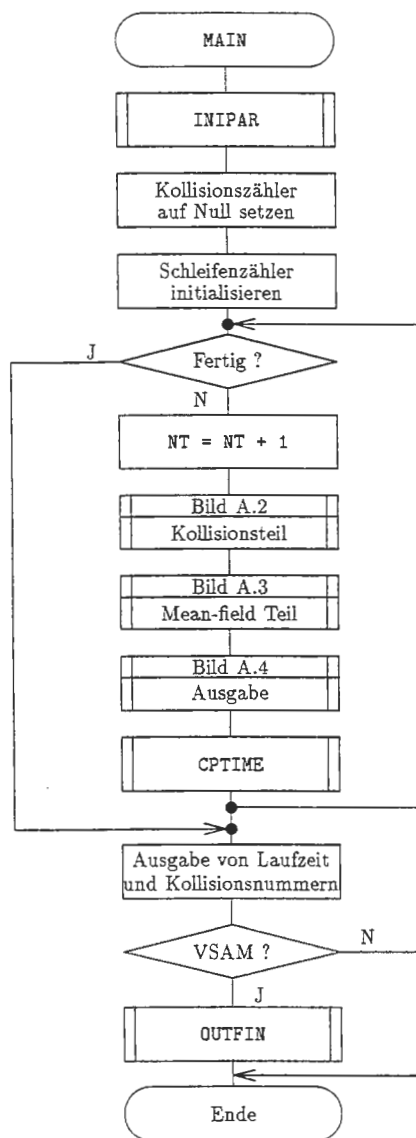


Abbildung A.1: Hauptprogramm MAIN

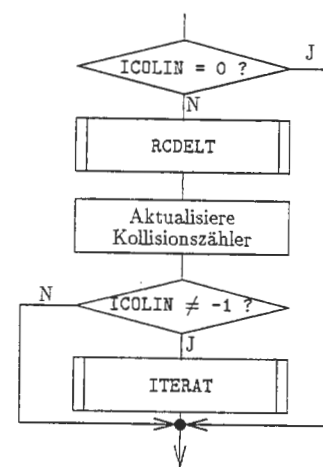


Abbildung A.2: Detail aus MAIN

PROCESS DC(MESON,PART,ITRAT,TPS,TPB)

PROGRAM MAIN

PSEUDOPARTICLESIMULATION OF
RELATIVISTIC BOLTZMANN EQUATION
WITH SELF-CONSISTENT MEAN-FIELD

AUTHOR: BUU GMBH & CO KG
BERNHARD BLAETTEL, VOLKER KOCH
ANDREAS LANG, KLAUS WEBER
INSTITUT FUER TH. PHYSIK
JUSTUS-LIEBIG UNIVERSITAET
6300 GIESSEN
WEST GERMANY

TOTALLY REVISED VERSION :
ANDREAS LANG & KLAUS WEBER

GEISSELSTUFE: 04

SUBROUTINES USED:

CPTIME (MIT ENTRY TIMEIN)
.DENS
INECHO
INIPAR
INIT
FREFLW

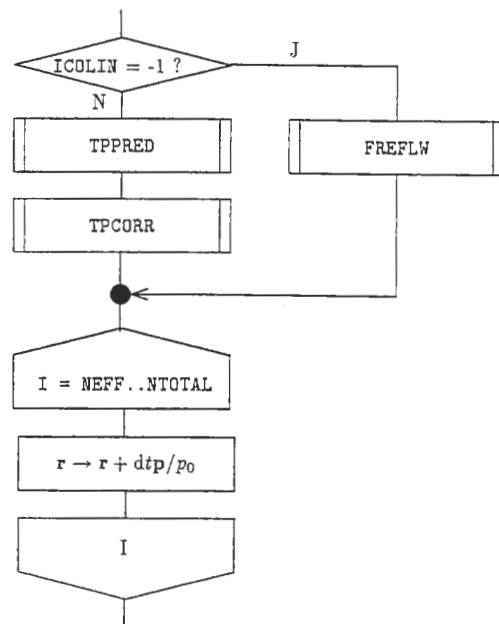


Abbildung A.3: Detail aus MAIN

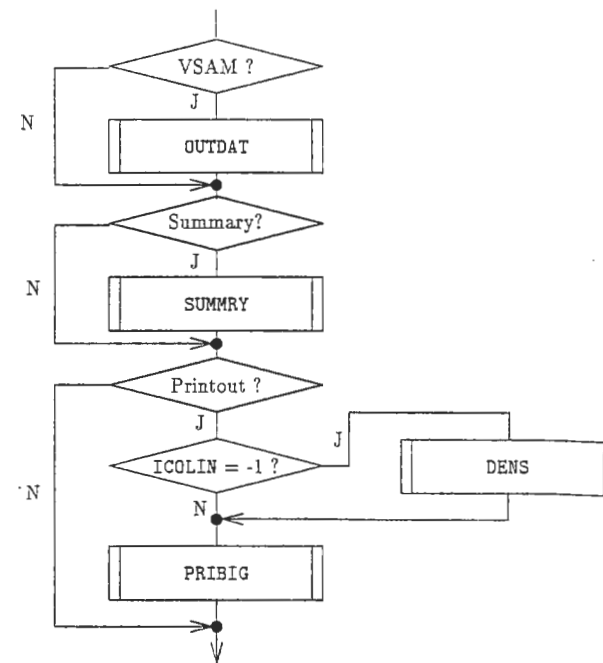


Abbildung A.4: Detail aus MAIN

```

*      KIMPAR
*      MATRI2
*      PDENS
*      PRECOR
*      PRIBIG
*      RAN      (FUNCTION - RUFT RH)
*      RN      (MIT ENTRY RMSET, STEHT AUF 'SYSX.DESYLIB')
*      TPCORR
*      TPPRED
*      SUMMRY
*      UPDAT   (MIT ENTRY UPINIT)
*
*      OUTPUT UNIT: 10 (=ISUM)
*
*-----
*      PARAMETERS: (IN MEMBER INCLFILE )
*
*      MAXPAR   - MAXIMUM NUMBER OF TESTPARTICLES PROGRAM CAN HANDLE
*      NX,NZ    - NUMBER OF GRIDPOINTS IN X- AND Z-DIRECTION
*      MAXX,MAXZ - DIMENSION OF SPATIAL-GRID
*
*      HC       - 2 PI HBAR C (GEV FM)
*      AMU      - MASS UNIT (INV. FM)
*      HQC      - HBAR C (GEV FM)
*      HBARC    - 1000 * HQC
*      SURFAC   - SURFACE THICKNESS FOR INITIALISATION
*      IORD     - ORDER OF PREDICTOR/CORRECTOR FOR MESON FIELDS
*                MAXIMUM VALUE IS 5 !!!!
*
*-----
*      INCLUDE (INCLFILE)
*
*      CHARACTER * 60  TITLE
*
*-----
*      DIMENSIONS :
*
*      R      FM
*      P      1/FM
*      XMEFF  1/FM
*      RHOS   1/FM**(-3)
*      RHOV   1/FM**(-3)
*
*-----
*      INITIALIZATION OF GLOBAL-VARIABLES, SUBROUTINES ...
*
*-----
*      CALL INIPAR( LIMIT, WTMAX, NUM, NTOTAL, ICOLIN, IVSAM, ITSTEP,

```

```

+      IPSKIP, NFRSUM, NFRPRI, CPUTIM, MASSTA, MASSPR,
+      NNUCL )

```

``` *----- * INITIALIZATION OF COUNTER-VARIABLES *----- ```

```

NCBTOT = 0      ! TOTAL NUMBER OF COLLISIONS BEFORE PAULI
NCATOT = 0      ! TOTAL NUMBER OF COLLISIONS AFTER PAULI
NCNWE = 0       ! NUMBER OF COLLISIONS NN -> NN (ELASTIC)
NCNND = 0       ! NUMBER OF COLLISIONS NN -> N DELTA
NCNDN = 0       ! NUMBER OF COLLISIONS N DELTA -> NN

```

``` *----- * INITIALIZATION OF AUXILIARY-VARIABLES *----- ```

```

NEFF = NTOTAL   ! 'EFFECTIVE' NUMBER OF TESTPARTICLES
NT = 0          ! INITIAL TIME-STEP

```

```

EJECT

```

```

*****
*      START OF TIME-STEP LOOP
*
*-----

```

```

DO WHILE( CPUTIM .LT. FLOAT(LIMIT) .AND. NT .LT. NTMAX )

```

```

    NT = NT + 1

```

```

    WRITE(*,*) 'START OF TIMESTEP ',NT

```

``` *----- * CASCADE PART *----- ```

```

IF ( ICOLIN .NE. 0 ) THEN

```

```

*      TRANSFORM TO UNITS OF GEV FOR MOMENTA, MASSES
*      AND ENERGIES AS USED BY COLLISION TERM
*
*-----

```

```

DO I = 1, NEFF
  P(0,I) = HQC * P(0,I)
  P(1,I) = HQC * P(1,I)
  P(2,I) = HQC * P(2,I)

```

```

* UPDATE THE NUMBER OF PARTICLES WHICH ARE STILL IN THE GRID *
* ----- *
NTOTAL = NLAST
RETURN
END

```

More Code: Please ask Prof. Mosel for the original version.

Lebenslauf

Geboren:	17.12.1964 in Saarbrücken	
Eltern:	Nikolaus Lang Käte Lang geb. Lange	
Schulbildung:	1971 - 1973 1973 - 1975 1975 - 1984 15.6.1984	Grundschule Dortelweil Geschwister-Scholl-Schule Assenheim Augustiner-Schule Friedberg Erwerb der allgemeinen Hochschulreife
Wehrdienst:	1.7.1984 - 30.9.1985	Grundwehrdienst in Wetzlar
Studium:	1.10.1985 25.9.1987 23.11.1989 seit 1.12.1989	Beginn des Studiums der Physik an der Justus-Liebig- Universität in Gießen Vordiplomprüfung in Physik Diplomprüfung in Physik Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der JLU Gießen

Danksagung

An erster Stelle gilt mein herzlicher Dank Herrn Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Themenstellung der Arbeit, seine Betreuung und Unterstützung.

Herr Dr. Dr. Wolfgang Cassing trug durch seine unermüdliche Diskussionsbereitschaft wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Weiterhin möchte ich mich bei allen „RBUU-Mitstreitern“, Klaus Weber, Dr. Bernhard Blättel und Dr. Volker Koch, für die gute und produktive Zusammenarbeit bedanken.

Nicht unerwähnt bleiben soll auch die Unterstützung, die ich von allen Institutsmitgliedern erfahren habe. Herausgehoben sei hier speziell Hans-Christoph Dönges.

In Verbindung mit unserer EASI-Kooperation mit der IBM-Deutschland GmbH möchte ich mich speziell bei den Herren Dr. Hans Babovsky und Dr. Hans-Georg Reusch bedanken.

Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei meinen Eltern für ihre Unterstützung während dieser Zeit bedanken.